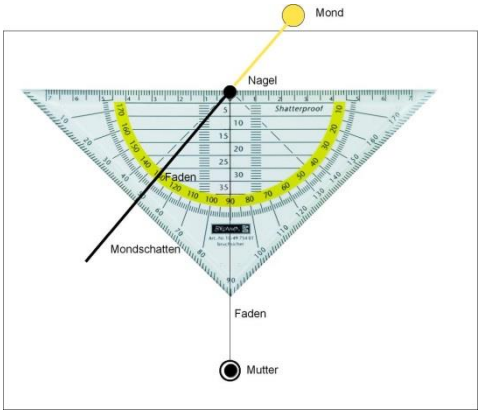
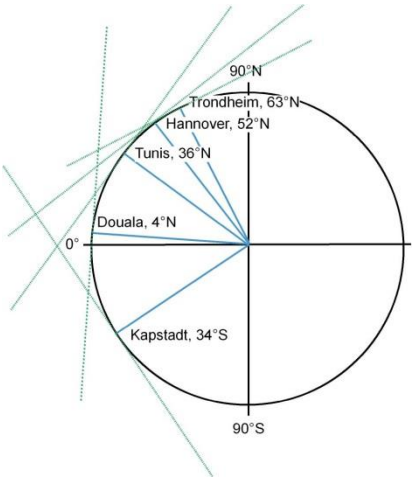
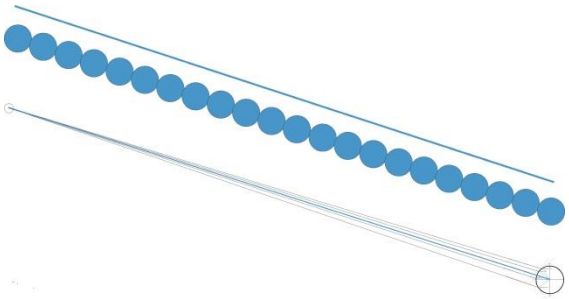
Landeshauptstadt Hannover

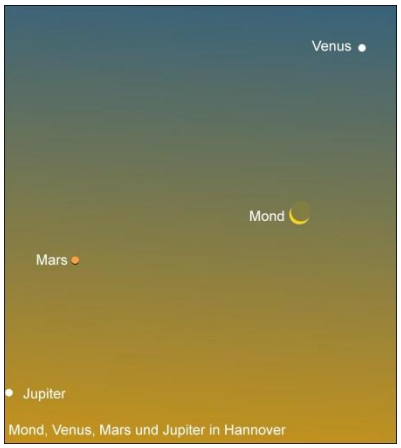
Hannover

Schulbiologiezentrum









19.75

Wie groß ist der Mond? Wie weit ist er entfernt?

Ein astronomisch-geometrisches Unterrichtsprojekt

Januar 2015

Herausgeber: Landeshauptstadt Hannover
Schulbiologiezentrum Hannover

Titel: Wie groß ist der Mond?
Wie weit ist er entfernt?
Ein astronomisch-geometrisches Unterrichtsprojekt

Titelbild: Ingo Mennerich

Arbeitshilfe 19.75

Verfasser: Ingo Mennerich

Herausgeber: Landeshauptstadt Hannover
Fachbereich Bibliothek und Schule
Schulbiologiezentrum
Vinnhorster Weg 2
30419 Hannover
Tel: 0511/168-47665
Fax: 0511/168-47352
E-Mail: schulbiologiezentrum@hannover-stadt.de
Internet: www.schulbiologiezentrum.info

Inhalt

Einige Sätze vorweg:	4
Wie groß ist was?	4
Wie groß ist die Erde?	6
Winkelmessung mit dem Sextanten	9
Die geographische Breite mit Hilfe des Polarsterns bestimmen	10
Wie groß ist der Mond?	11
Wir nutzen unsere Hände als "Winkelmesser"	12
Winkelgröße und Entfernung	13
Sonnenfinsternisse und ihre kleinen "Verwandten" als Entfernungsmaß?	15
Mond"vermessung" mit Kamera und Geodreieck	20
Mond"vermessung" mit dem Geodreieck	22
Kennt man die Entfernung, kennt man die Größe	26
Der Mond mit der Kamera	27
Mond"vermessung" mit dem Taschenrechner	30
Und noch einmal Mondfinsternis…	34

Einige Worte vorweg

"Wenn ich könnte, würde ich dich zum Mond schießen!"
Ja, wenn doch nur nicht das Wort "wenn" nicht wäre….

"Meine Süße, soll ich dir den Mond vom Himmel holen?"
Aber wer hat schon eine so lange Leiter?

Wer jemanden zum Mond schießen möchte müsste zunächst erst einmal darüber nachdenken, wie er diese "Punktlandung" schaffen könnte.
Der Mond ist am großen Himmel nur ein kleiner gelber "Ball". Und er steht dort nicht einmal still…

Also: Wie groß ist der Mond? Wie weit lang ist der Weg dorthin?

Kann man das als "einfacher Mensch" überhaupt herausfinden?

Ja man, kann!

Wie viele Methoden fallen uns ein?

Wie groß ist was…?

Seit der EXPO2000 gibt es ein kleines "Sonnensystem" im Schulbiologiezentrum das auf 150 m Länge maßstabgetreu zeigt, wie groß und wie weit voneinander entfernt Sonne und ihre Planeten sind. Wenn man aus der Position der "Erde" auf den Tischtennisball schaut der die Sonne darstellt, ist der Ball etwa so groß wie die durch dunkles Glas betrachtete Sonne am Himmel.
Das gelingt auch mit einem gelben Gymnastikball als "Sonne" und einer Erbse als "Erde".
Wenn wir uns, mit der Erbse in der Hand, so weit von der "Sonne" weg bewegen dass sie genauso "groß" erscheint wie die wirkliche Sonne - und das sind viele Meter - können wir uns eine Vorstellung davon machen, wie weit wir von der Sonne entfernt sind. Das gelingt aber nur unter einer Voraussetzung: Man muss dazu wissen, wie groß die Erde bzw. die Sonne ist.
Auch die Distanz Erde-Mond lässt sich auf diese Weise ausmessen wenn man den Gymnastikball zum "Mond" macht und sich so weit von ihm entfernt, dass er so groß erscheint wie der wirkliche Mond am Himmel. Das Größenverhältnis Erde/Mond ist leichter zu bestimmen als das von Sonne und Erde weil die Erde einen langen Schatten ins Weltall wirft und der Mond von Zeit zu Zeit in diesen Schatten tritt…

Wir "wissen" heute, dass die Erde im Verhältnis zur Sonne nur ein "Krümel" ist und viele Male in unseren "Stern" hineinpassen würde. Deshalb haben wir uns dafür entschieden, dass der Gymnastikball die "Sonne" und die Erbse die "Erde" spielt und nicht umgekehrt. Und dafür, dass die "Erde" eine Erbse ist und nicht ein Tennisball.
Unser Wissen beruht auf dem , was man uns das gesagt hat oder was wir in Lexika oder im Internet nachgesehen haben. Die Berechnung unseres "Sonnensystems" fußt, für Schüler nachvollziehbar, auf den Daten die im DIERCKE-Atlas stehen.

Aber: Mit diesem wie selbstverständlich erscheinenden Wissen stehen wir auf den Schultern von denjenigen, die das für sich und für uns herausgefunden haben. Sie wussten es nicht (oder waren sich nicht sicher) und haben Hypothesen aufgestellt, sich Methoden ausgedacht, gemessen, manches verworfen und neu angefangen und schließlich eine Lösung gefunden.
Heute weiß jedes Kind, dass die Erde keine Scheibe ist und um die Sonne kreist. Wer sich aber aufgefordert sieht, sichtbare und überprüfbare Zeichen für diese Tatsachen zu finden wird schnell an seine Grenzen stoßen. Es ist eben doch kein Zufall, dass es so lange gedauert hat bis uns die Verhältnisse rund um "Sonne, Mond und Sterne" klar wurden.
Heute kann man die Entfernung zum Mond mittels Long Range Radar oder durch einen Laserbeam auf einen Meter genau messen in dem man die Laufzeit eines auf der Erde ausgesandten und auf dem Mond reflektierten Signals bestimmt. Dann muss man nur noch die Lichtgeschwindigkeit mit der Laufzeit malnehmen und erhält die doppelte Distanz. Das gelingt auch mit guten Antennen ausgestatteten Funkamateuren die, den Mond als "Spiegel" nutzend, über den ganzen halben Erdball hinweg miteinander kommunizieren können (EME-Verbindungen, "Moonbounce")
Ein Richtung Mond gesandter Morsepiep braucht etwa 2,5 Sekunden um wieder auf der Erde anzukommen. Daraus ergibt sich ein Laufweg von 300000 km x 2,5s = 750000 km oder 375000 km Entfernung.
In diesem modernen Licht betrachtet, ist die Frage der Mondentfernung keine wirkliche Forscherfrage mehr. Vielleicht ist sie es aber doch und gerade deshalb, weil das Ergebnis längst bekannt ist. Die Forscherfrage müsste hier nur heißen: Sind wir in der Lage, das Ergebnis mit eigenen Mitteln zu bestätigen?
Der folgende Projektvorschlag sollte daher bitte nicht als "Unterrichtseinheit" aufgefasst werden sondern nur als Sammlung möglicher Herangehensweisen an die Frage.
Die meisten Methoden beruhen auf vergleichenden Beobachtungen an verschiedenen Orten, z.B. durch das Aufeinanderlegen von zur gleichen Zeiten gemachten Mondfotos. Immer wieder geht es um Winkel die entweder mit der ausgestreckten Hand, dem Geodreieck, einem selbst gebauten Quadranten oder sogar dem Spiegelsextanten gemessen werden. Im Prinzip kann man die Mondentfernung dann mit Zirkel, Geodreieck, Lineal oder langen Fäden bestimmen. Oder man nutzt den Taschenrechner der der Mathematik viel von ihrem Schrecken genommen hat. Mit einigen wenigen geometrischen Zusammenhängen wie der Winkelsumme im Dreieck bzw.. Viereck, dem Tangens (Verhältnis Gegenkathete/Ankathete), der Proportionalität ("Strahlensatz") und dem Sinus- bzw. Cosinussatz) erhält man recht gute Ergebnisse. Entscheidend ist die Genauigkeit mit der man die Natur beobachtet, in diesem Fall z.B. die Winkel misst.
An welcher Stelle man das Projekt beginnt, welche Größen man also als "gegeben" voraussetzen möchte darf man ruhig den Umständen entsprechend selbst festlegen. So kann man z.B. von der bei einer Mondfinsternis bei der Vermessung des Erdschattens aufgestellten Hypothese ausgehen, dass die Erde zwei oder dreimal so groß sein könnte wie der Mond. Wenn man die Größe der Erde als Basis nimmt fällt die Entfernungsbestimmung zeichnerisch und rechnerisch nicht schwer.
Wir beginnen hier im "Erkenntnisprozess" ganz unten, gewissermaßen bei "Adam und Eva" und der Frage, wie man die Größe der Erde bestimmen könnte.

Wie groß ist die Erde?

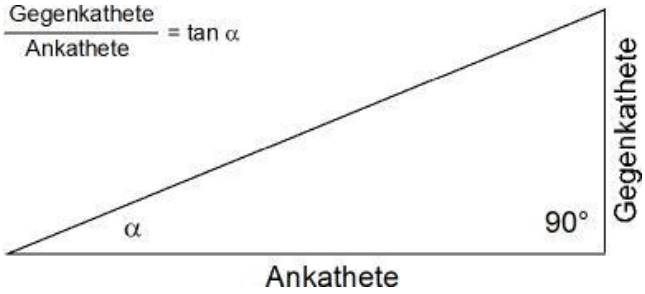
Um den Mond vermessen zu können, braucht man eine Bezugsgröße, z.B. die Größe der Erde. Um diese zu bestimmen muss kann man z.B. mittags die Sonnenhöhe an zwei Orten messen deren Entfernung zueinander bekannt ist.

Alexandra und Christine sind Zwillingsschwestern.
Alexandra studiert in Pisa, etwa 1000 km südlicher als Christine, die nördlich von Hannover zu Hause ist. Sie sehen gleich aus, sind gleich groß und teilen beide ein Interesse:
Dingen auf den Grund gehen und selbst zu erleben, wie große Forscher die Welt und ihre Gesetze entdeckt haben.. So haben die beiden Schwestern, wie Galilei, auf dem „Schiefen Turm“ in Pisa ausprobiert, mit welcher Geschwindigkeit verschiedene Dinge zu Boden fallen.
Fasziniert hat sie auch ein gewisser Eratosthenes, der im alten Ägypten lebte und mit verhältnismäßig bescheidenen Hilfsmitteln aber ziemlich erfolgreich der Frage nachging, wie groß die Erde ist.
So etwas können wir heute, sollten wir das tatsächlich einmal wissen wollen oder für die Schule wissen müssen, mit dem Smartphone bei Wikipedia nachschlagen. Das ging damals nicht!
Eratosthenes verglich die Länge der Schatten, die die Sonne zur gleichen Zeit im Norden und im Süden Ägyptens warf. Die Länge des Weges zwischen beiden Orten war bereits bekannt.
Durch kluges Nachdenken schloss er, lange bevor sich diese Idee in Mitteleuropa durchsetzte, dass die Erde rund ist und errechnete sogar die Größe dieser Kugel.

Alexandra und Christine wollen ausprobieren, ob ihnen das auch gelingt.
An einem sonnigen Tag kurz vor Weihnachten versuchen die beiden, gleichzeitig mittags mit Hilfe der Länge ihrer Schatten herauszufinden, wie groß die Erde ist:
Obwohl die beiden 1,80 m groß und beide auf ebenem Boden stehen sind ihre Schatten unterschiedlich lang. Der Schatten nördlich von Hannover ist etwa 7 m, der in Pisa 4 m lang.
Wie groß ist die Erde?

Christines Schatten ist länger (7 m) als Alexandras (4 m).
Beide sind gleich groß (1,80).
Die unterschiedlichen Schattenlängen haben ihre Ursache in der unterschiedlichen Höhe der Mittagssonne: Die tief stehende Sonne erzeugt lange, die höher stehende Sonne kürzere Schatten.
Die Winkelhöhe der Sonne findet man durch genaues (!) Zeichnen, z.B. auf Millimeterpapier.
Die jeweilige „Höhe“ der Sonne entspricht einem bestimmten Winkel den man mit dem Geodreieck messen kann.
Man kann die Lösung auch durch Rechnen finden:
Schattenlänge und Körperhöhe bilden die Ankathete und Gegenkathete eines rechtwinkligen Dreiecks.
Das Verhältnis Körperhöhe (Gegenkathete) zu Schattenlänge (Ankathete) bestimmt die Größe des der Gegenkathete gegenüber liegenden Winkels. Der Quotient Gegenkathete/Ankathete ist der Tangens des Winkels und dieser Winkel ist die Sonnen“höhe“.

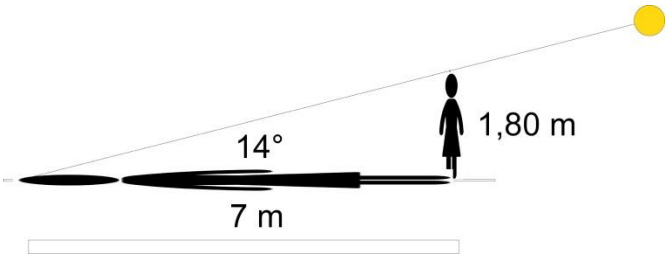
Gegenkathete/Ankathete = tan(Winkel),
Winkel = atan(tan(Winkel)



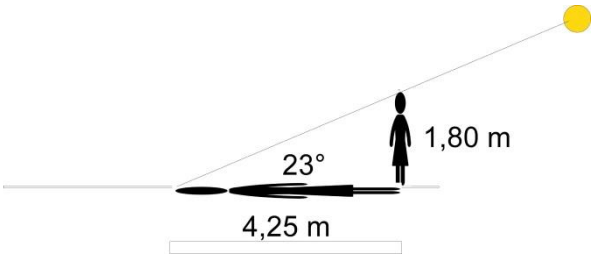
Christines Schatten ist 7 m lang:
→tan(Winkel) = 1,80m / 7m = 0,251…
→Winkel: etwa 14°

Alexandras Schatten ist 4,25 m lang:
→tan(Winkel) = 1,80m / 4,25m = 0,426…
→Winkel: etwa 23°

Dort wo Christine wohnt steht die Sonne 14° hoch
Dort wo Alexandra wohnt steht die Sonne 23°, also 9° höher.

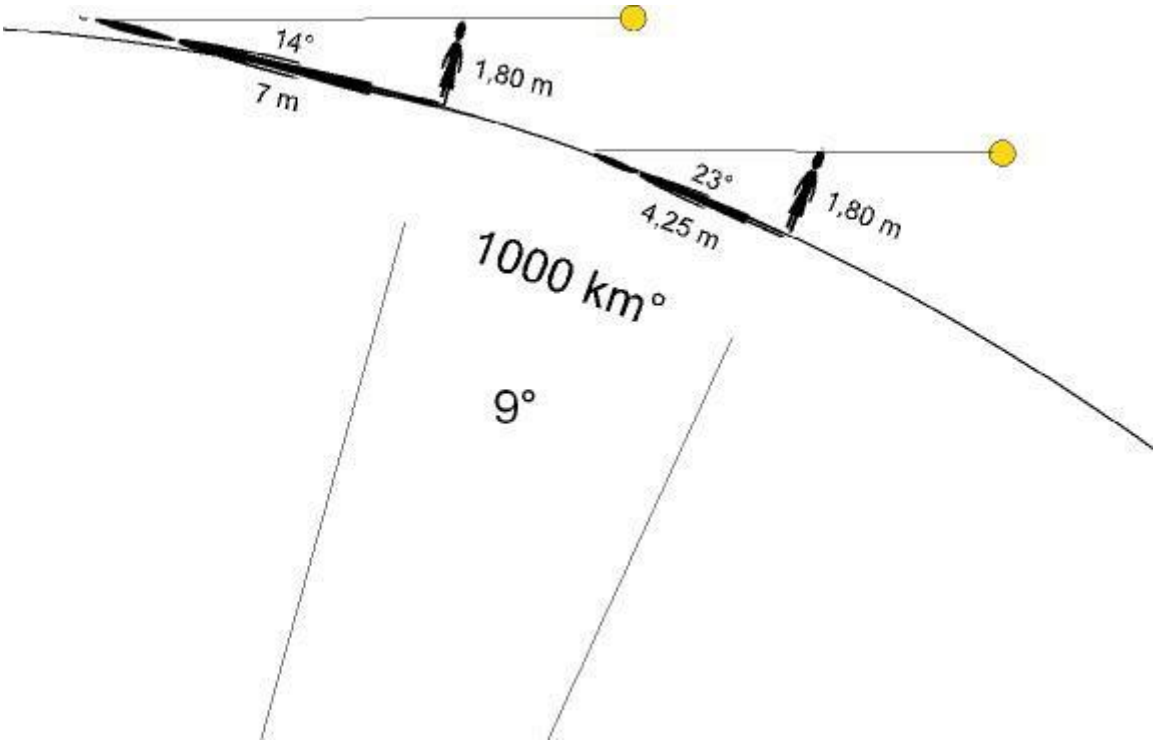


Christine und ihr Schatten



Alexandra und ihr Schatten

Christine wohnt 9° und 1000 km nördlicher als Alexandra.



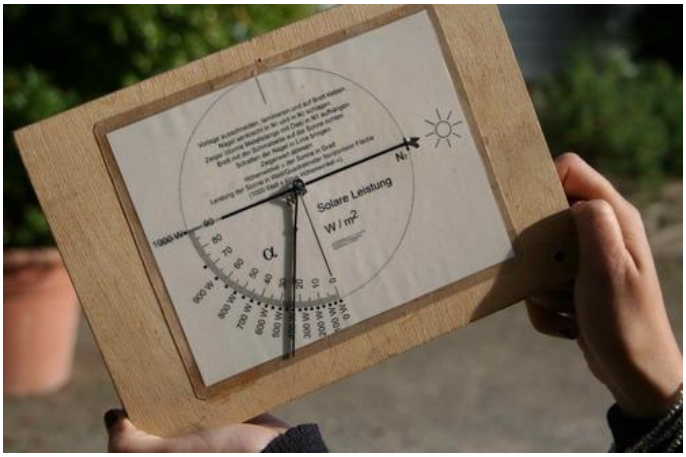
9° Unterschied in der geographischen Breite entspricht 1000 km.
Das sind 9 Teile von 360°.
Dann gilt für den Erdumfang: 360/9 = 40 x 1000 = 40000 km
Der Erdumfang ist dann 1000 km x 40 = 40000 km.

Der Durchmesser ist in jedem Kreis der etwa 3,14te Teil des Kreisumfangs was man durch Messen des Umfangs (etwa durch Abrollen oder Anlegen eines Fadens) beliebiger kreisförmiger Objekte, z.B. bei Bierdeckeln und Tellern, und durch Teilen durch den Durchmesser empirisch herausfinden kann.

Als Formel gilt U/d = 3,14…

Auf den Erddurchmesser bezogen: d = 40000/3,14…= 12738 km. Der Radius beträgt die Hälfte.

Zur Messung der Sonnenhöhe über dem Horizont kann sich auch aus einem Brett, einem aufgeklebten Geodreieck, einem in Brett getriebenen Nagel und einem daran aufgehängten, mit einer Mutter beschwerten Faden ein Messgerät bauen, dass bei sorgfältiger Handhabung recht brauchbare Ergebnis liefert.



Unser "Solarer Leistungsmesser" ist ähnlich:
Er wird so in die Sonne gehalten, dass die Schatten zweier Nägel auf einer Linie liegen. Gleichzeitig zeigt eine in einem Nagel aufgehängter und senkrecht hängender Zeiger aus Metall die Winkelhöhe der Sonne an, in diesem Fall auch die solare Leistung, die auf einen Quadratmeter Erdboden fällt.

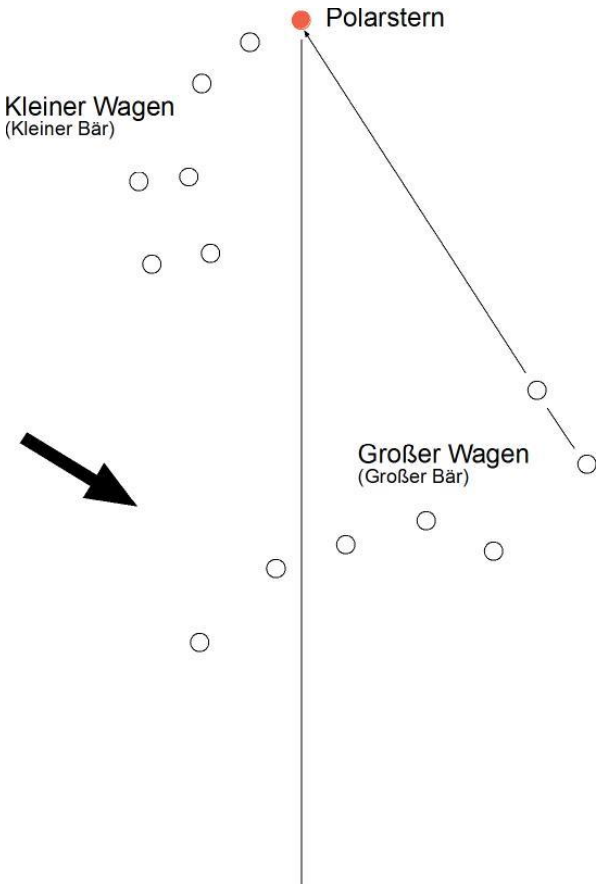
Auch der Vollmond ist hell genug um Schatten zu liefern!

Winkelmessung mit dem Sextanten

Der Sextant ermöglicht bei richtiger Handhabung sehr genaue Winkelmessungen. Mit Hilfe eines festen halbtransparenten Spiegels und eines drehbaren Spiegels kann man auf einer 60°-Skala den Winkelabstand zwischen zwei gleichzeitig ins Visier genommenen Orten bestimmen, z.B. der Sonne und dem Horizont. Ein so genannter Nonius erlaubt das Ablesen auch von Bruchteilen eines Grades.
Einen Sextanten kann man sich auch selbst bauen und damit

- den Winkeldurchmesser von Sonne und Mond bestimmen
- die Winkelhöhe von Objekten messen, z.B. von Bäumen, Gebäuden, Bergen, der Sonne oder des Mondes
- die Winkelhöhe des Polarsterns messen

Die geographische Breite mit Hilfe des Polarsterns bestimmen



Der Polarstern „steht“ ganzjährig und zu jeder Tageszeit senkrecht (90°) über dem Nordpol.

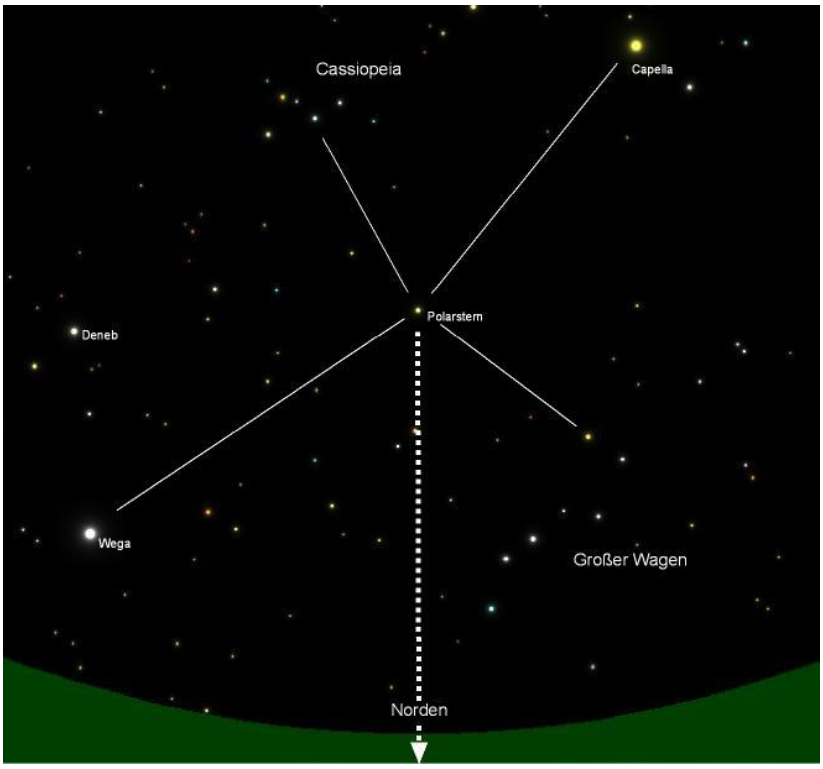
Man muss also nicht warten, bis er (wie die Sonne) seine höchste Position erreicht.

Dafür wirft er keinen Schatten und muss, mit dem Sextanten oder dem Quadranten angepeilt werden, wobei man auch den Horizont im Auge halten muss.

Man findet den Polarstern nachts leicht zwischen dem "Himmels-W" Cassiopeia und dem Großen Wagen, eingerahmt von den hellen Sternen Wega und Capella.

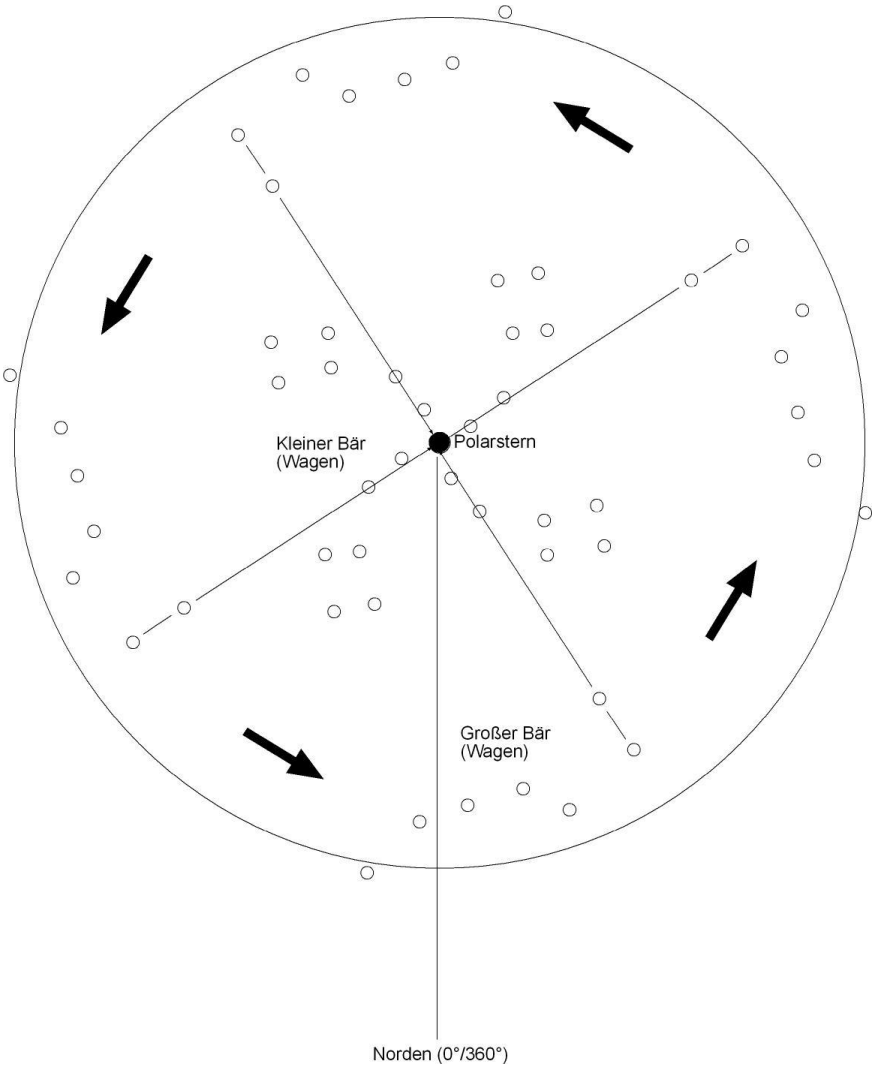
Richtung und Länge der Verbindungslinie zwischen den beiden vordersten Sternen des Großen Wagens helfen beim Aufsuchen des Polarsterns.

Der Polarstern hebt sich als hellerer Stern deutlich vor seinen schwächeren Nachbarn hervor.



Die Winkelhöhe des Polarsterns über dem Horizont entspricht der geographischen Breite des Beobachtungsortes, d.h.

- Am Nordpol steht er 90° hoch, also senkrecht im Zenit.
- In Hannover steht er stets 52°22´hoch über dem Nordhorizont.
- In Tunis steht er nur noch 36°50´hoch,
- in Douala liegt er, 4°04´ hoch, tief über dem Horizont.
- Am Äquator liegt er genau auf dem Nord-Horizont.
- In Kapstadt ist er nicht zu sehen.



Seine Position ist, in unmittelbarer Nähe zum Himmelsnordpol, im Gegensatz zu allen anderen Sternen, nahezu unveränderlich.

Alle anderen Sterne scheinen sich, bedingt durch die Rotation der Erde, gegen den Uhrzeigersinn um ihn herum zu drehen.

Schauen wir auf den Polarstern, sehen wir in Bezug auf unsere rotierende Erde nach "oben". Wir selbst stehen senkrecht auf schiefem Boden.

Die Winkelhöhe des Polarsterns lässt sich mit dem Spiegelsextanten vermessen. Das erfordert aber einiges an Übung:

- Es ist nicht leicht, den Polarstern auf die Horizontebene einzuspiegeln. Der Polarstern ist mit einer visuellen Helligkeit von 1,97 schwächer als Wega (+0,03) und Capella (0,1) aber etwa so hell wie die beiden, als Aufsuchhilfe dienenden "vorderen" Wagen-Sterne Dubhe (1,81) und Merak (2,34).
- Gleichzeitig muss man einen, auf Meereshöhe liegenden freien Horizont zur Verfügung haben. Ersatzweise kann man die im abgebildeten Selbstbau-Gerät angebrachten Libellen als "künstlichen Horizont nutzen.

Ein Wanderer, der nachts von Hannover aufbricht und sich am Polarstern orientierend nach Norden geht wird nach vielen Kilometern feststellen, dass der Polarstern höher steigt und dass Sterne aus dem Nordhorizont auftauchen, die im Süden dort nicht zu sehen waren.
Auf der Höhe von Hamburg steht der Polarstern etwa 53,5° hoch, also ein Grad höher als in Hannover.
Hamburg liegt rund 110 km näher am Nordpol.
Der Erdumfang betrüge demnach 360° x110 km =39600 km.

Wie groß ist der Mond?

Jedes Smartphone liefert heute in kürzester Zeit die Antwort. Genauso gut "weiß" das Internet, oder im "Offline"-Betrieb ein Lexikon, wie schwer, wie schnell und wie warm er ist. Schnell ist auch herausgefunden, wann die nächste Mondfinsternis stattfindet oder ob an meinem 75. Geburtstag vielleicht gerade Vollmond ist. Vertrauen wir ruhig auf die Daten, die uns beispielsweise "Wikipedia" liefert. Sie stehen unter der Kontrolle der großen Gemeinschaft von "Usern" und "Administratoren. Darum geht es hier nicht.
Hier geht es um den Versuch, den normalen "Konsumenten" von Informationen selbst in die Rolle des "Forschenden", "Entdeckenden" oder "Erfindenden" zu versetzen.
Der Mond ist ein wunderbares, zum eigenen Nachdenken geradezu herausforderndes Objekt. So kann man - bei klarem Himmel - im Laufe eines Monats z. B. ohne Hilfsmittel selbst entdecken, dass

- der Mond nicht "zu-" und "abnimmt" (was ja bedeuten würde, dass er an Gewicht gewinnt oder verliert) sondern aus unterschiedlicher Richtung, von der Seite, von hinten und von vorne durch die Sonne beleuchtet wird.
- dass er jeden Tag später auf- und untergeht bzw. im Süden steht (wie viel später?)
- dass er vor dem Hintergrund der Sterne "wandert" (in welche Richtung?)
- dass er Sterne und Planeten bedecken kann, uns also näher ist als jene
- dass Ebbe und Flut etwas mit der Position des Mondes am Himmel zu tun haben

Mit dem Fernglas oder Fernrohr kann man vielen Dingen noch besser auf den Grund gehen, im Prinzip reichen aber zwei wache Augen, Zeit, Geduld und die Fähigkeit, die Beobachtungen miteinander zu kombinieren.

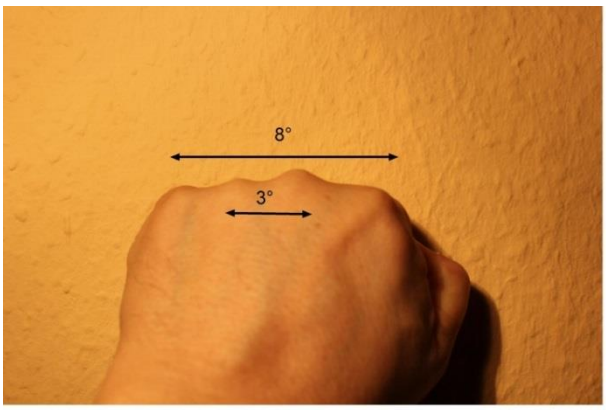
Die Entfernung und die Größe des Mondes bestimmen zu wollen ist schon etwas anspruchsvoller, gelingt aber mit einfachen Hilfsmitteln und etwas Geometrie. Wer Angst vor Formeln hat, wird auch mit einfachen selbst gebauten Messhilfen, Zirkel, Geodreieck, Lineal und spitzem Bleistift zu annehmbaren Resultaten gelangen. Natürlich gibt es auch rechnerische Lösungen die, wenn man mit bestimmten Gesetzmäßigkeiten die in Dreiecken und Vierecken gelten, den "Charme" haben, dass man sie aus der zeichnerischen Lösung selbst entwickeln kann.
Hat man die Größe und die Entfernung des Mondes bestimmt, kann man sich an noch schwierigere Aufgaben herantrauen, wie z.B. das "Gewicht" (die Masse) des Mondes zu bestimmen. Wer möchte, kann daraus errechnen, wie "schwer" man auf dem Mond wäre oder wie hell es auf der Mondoberfläche ist.
Leider sind wir "Normalsterblichen" nicht in der Lage, den Mond selbst vor Ort zu vermessen. Das können wir nur auf indirektem Wege tun. Dabei helfen einfache Alltagserfahrungen.
Ob ein Auto noch weit weg ist, oder schon bedrohlich nahe, erkennt man an der "Größe". Damit sind nicht große und weniger große Autos gemeint sondern die von uns wahrgenommene scheinbare Größe des Autos. Wir lernen schon früh, aus der scheinbaren "Größe" uns bekannter Gegenstände auf ihre Entfernung zu schließen.
Die scheinbare "Größe", also der Sehwinkel unter dem ein in seinen Maßen bekanntes Objekt von unseren Augen abgebildet wird steht in einer berechenbaren und nachprüfbaren Beziehung zu seiner Entfernung.

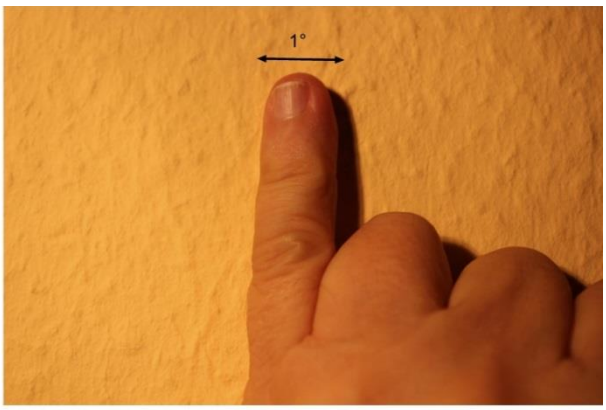
Wir nutzen unsere Hände sind "Winkelmesser"

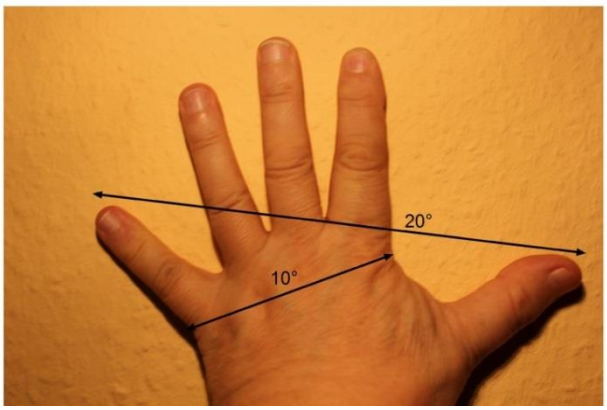
Wenn wir einen Arm ganz in Richtung auf das zu "vermessende" Objekt ausstrecken können wir die Hand als groben "Winkelmesser" benutzen. Die "Gradeinteilung" kann man sogar selbst herausfinden:

- Spreizen wir die Finger weit auseinander.
- Wie groß ist die Spanne zwischen Daumen und kleinem Finger?
- Wie oft können wir unsere Umwelt "zwischen die Finger" nehmen, wenn wir uns einmal vollständig um unsere Achse drehen?
- Dabei müssen wir aufpassen, dass sich die "Abschnitte" nicht überlappen.
- Je nach Armlänge und Handgröße wird man 16 - 20mal ansetzen müssen, im Schnitt etwa 18mal.
- Da ein Kreis 360° umfasst entspricht eine Handspanne etwa 20°

Mit diesem Wert kann man sich beim Ausmessen der eigenen Hand weitere "Maßstäbe" ausdenken:







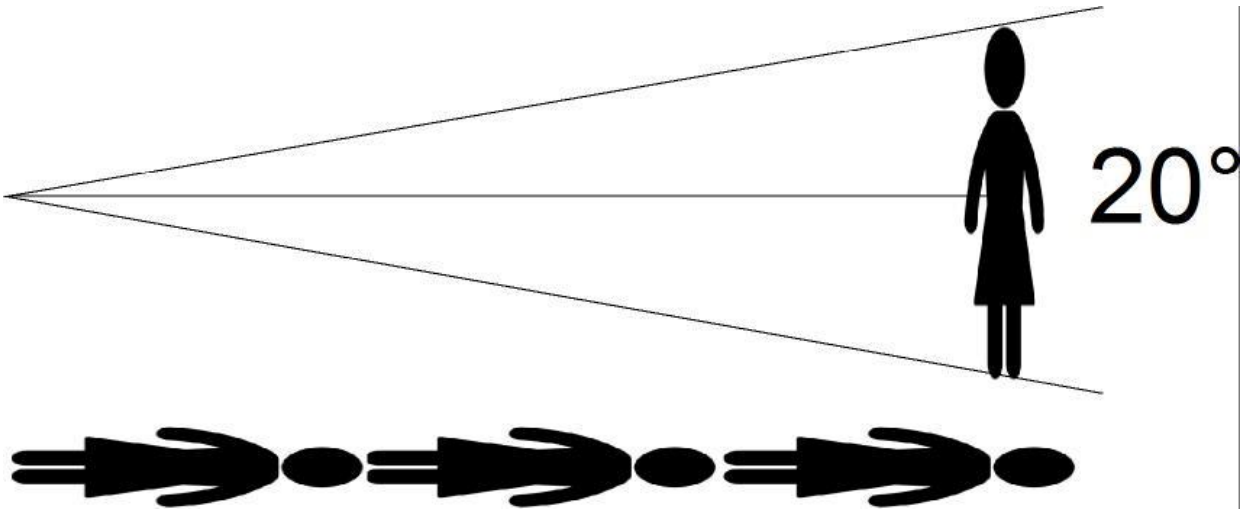
- Die Hand mit eingezogenem Daumen überdeckt etwa 10°
- Vom Knöchel des Zeigefingers zum Knöchel des kleinen Fingers sind es etwa 8°
- Zwischen den Fingerknöcheln liegen etwa 3°
- Der kleine Finger ist ungefähr 1° "dick".

Winkelgröße und Entfernung

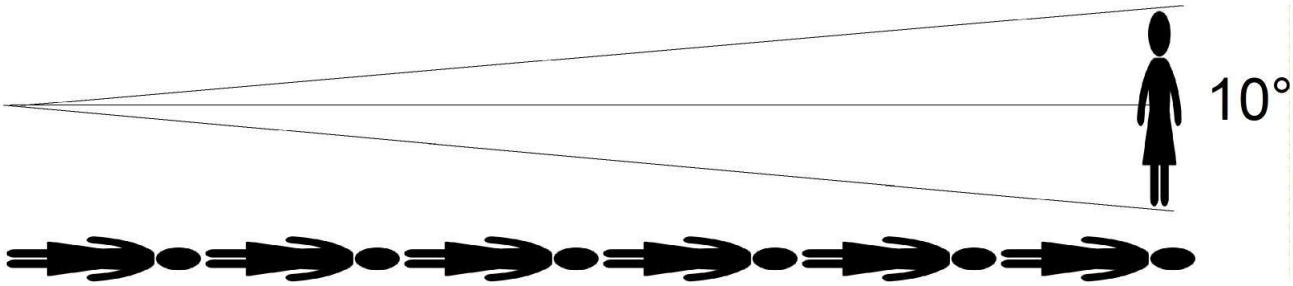
Wie weit ist ein Mensch entfernt, der unter einem Sehwinkel von

- 20°, 10°, 8°, 3° oder 1° erscheint?

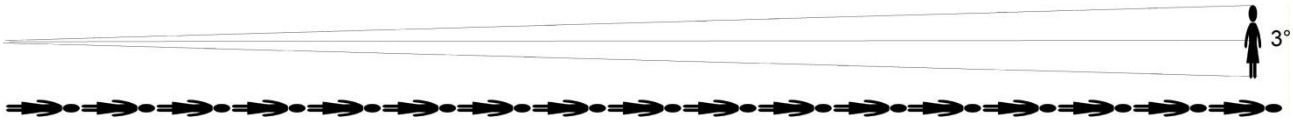
Die mit Geodreieck und Lineal bestimmte Entfernung kann man mit dem Maßband nachprüfen oder misst sie in "Menschengrößen".



Bei 20° Sehwinkel (2x10°) liegt die Entfernung bei etwa 3 "Menschengrößen".



Hier beträgt der Sehwinkel 10° (2x5°) und die Entfernung etwa 6 "Menschengrößen".



Bei 3° Sehwinkel (2x1,5°) liegt die Entfernung bei etwa 17 "Menschengrößen".

Gibt es einen Zusammenhang zwischen dem Sehwinkel und der Entfernung, einen den man in ein "Gesetz" kleiden könnte?
Wenn man den Sehwinkel als Ausschnitt aus einem Kreis betrachtet könnte man eine Proportionalität formulieren:

Die der Ausschnitt (Sehwinkel) verhält sich zum Kreis wie die (bekannte) Größe des Menschen zu seiner (noch unbekannten) Entfernung.
Dieses "Gesetz" gilt allerdings nur für kleine Sehwinkel. Mehr dazu später.

Wie „groß“ erscheint uns der Mond auf der Erde? Diese „Größe“ kann man zunächst nicht in Metern oder Bruchteilen angeben sondern als Sehwinkel. Dieser ist so klein, dass man den obigen Proportionalitätsgedanken weiter verfolgen kann. Mit dem so erworbenen Wissen können wir uns ein einfaches und billiges Messgerät bauen. Dazu brauchen wir etwas Mathematik:

Ein Kreis besteht aus 360 Winkelgraden. Sein Umfang (U) beträgt immer das Doppelte des Radius (r) multipliziert mit der Kreiszahl Pi (π): $U = 2*\pi*r$. Die nach r aufgelöste Formel heißt $r = 360/(2*\pi)$.

Das Messgerät besteht aus einem Stück Wasserrohr das auf eine bestimmte Länge zugeschnittenen wird und auf Folie kopiertem Millimeterpapier das man auf die Vorderseite des Rohrs klebt.
Unser Ziel: Schaut man durch das transparente Millimeterraster auf das Objekt soll 1 cm einem Winkel von 1 Grad entsprechen. Dafür setzt man 1° = 1 cm.

Geht man von einem Kreisumfang von 360 cm aus, lässt sich die Strecke Auge – Folie leicht errechnen: Wenn der Abstand zwischen Auge und Folie $360\ cm/(2*\pi) = 57{,}3\ cm$ beträgt, erscheint 1 cm unter einem Winkel von 1°.
Bei der Länge des Rohres muss man berücksichtigen, dass man es nicht direkt auf das Auge setzt. Den zwischen Auge (genauer der Augenlinse) und dem Ende des Rohres verbleibenden „Rest“ bestimmt man am besten, indem man einen Finger zwischen Auge und Rohr hält und dann die Breite des Fingers misst. Um diese Breite muss die Rohrlänge verkürzt werden.
Der große Abstand zwischen Auge und Folie stellt sicher, dass man sowohl das Folienraster als auch das Objekt scharf sehen kann.
Je größer der Rohrdurchmesser, desto mehr Winkelgrade werden überstrichen. Allerdings ist zu berücksichtigen, dass die Folie, die ja eigentlich einen Ausschnitt des Kreises darstellen soll eine plane Fläche ist. Das führt mit steigenden Winkeln zu immer größeren Verzerrungen.
Winkel lassen sich genauer mit einem teuren oder auch selbstgebauten Sextanten messen. Das Schulbiologiezentrum Hannover hat eine Bauanleitung für einen Sextanten aus Holz veröffentlicht.

Zurück zum Mond: Auf der Erde erscheint er uns unter einem Winkel von etwa 0,5°.
Man kann ihn daher gut nutzen um zu prüfen, wie gut unser Messgerät ist. .
Wie groß ist er wirklich? Wie weit ist er entfernt?
Mit Hilfe der schon ins Auge gefassten Proportionalitäten kommt man schon erheblich weiter:
Denkt man sich diesen Winkel als Teil eines Kreises kann man formulieren:

Die Winkelgröße (Grad) des Objekts verhält sich zum Kreis (Grad)

wie

die Größe des Objekts (Meter) zum Umfang des Kreises (Meter)

Ein Kreis umfasst 360° und der Kreisumfang ist gleich Kreisdurchmesser mal Kreiszahl Pi

Die Entfernung entspricht dem Radius (r) des Kreises. Damit gilt $U = 2*\pi*r$

Winkelgröße/360° = Größe/Entfernung*2π

Umgestellt nach „Entfernung“:

Entfernung = (Größe*360°)/(Winkelgröße*2π)

- Wie weit ist ein 1,75 großer Mensch entfernt, wenn er unter einem Winkel von 0,5° erscheint?
- Entfernung: (1,75m*360°)/(0,5°*2*π) = 200,5 m

Ein Mensch ist, aus 200 m Entfernung gesehen, so „groß“ wie der Mond. Seine physische Größe ist allerdings bekannt und lässt sich - im Gegensatz zum Mond - vor Ort nachprüfen.

Dessen Entfernung ist nach wie vor unbekannt. Setzen wir eine beliebige Distanz an so ergibt sich:

Größe = (Winkelgröße/360°)*Entfernung*2π

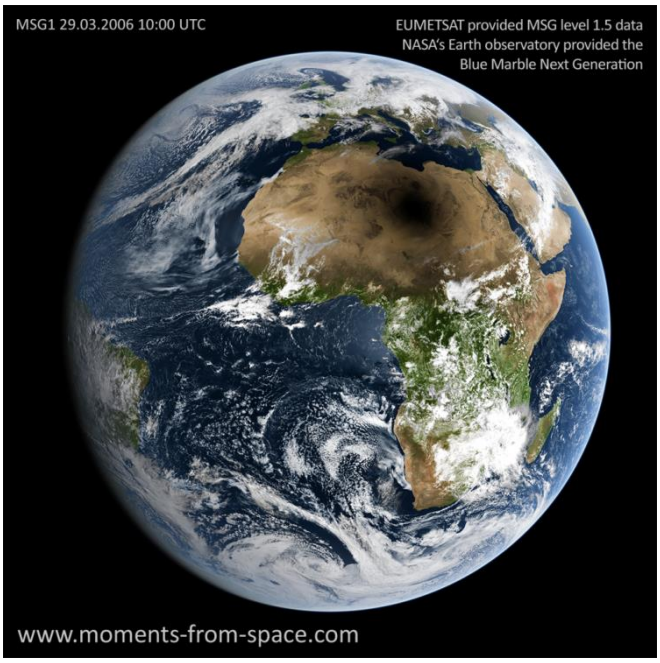
- Wie groß wäre der Mond Wäre wenn die Entfernung Erde-Mond gleich 100 km wäre?

- Größe = (0,5°/360°)*100*2π = 0,873 km

Der Mond ist in Wirklichkeit viel weiter von uns entfernt und ist erheblich größer. So steht es im Lexikon und bei Wikipedia. Nur: Woher weiß man das?
Eine über uns hängende Lampe scheint die gleiche Größe haben wie der Mond. Da sich der Mond im Gegensatz zur Lampe manchmal hinter Wolken verbirgt wird er weiter von uns entfernt und damit nach aller Erfahrung größer sein. Nur wie groß?
Mond und Sonne erscheinen am Himmel etwa gleich groß. Sind sie das tatsächlich?

Sonnenfinsternisse und ihre "kleinen Verwandten" als Entfernungsmaß?

Bei einer Sonnenfinsternis verdeckt der Mond die Sonne ganz oder teilweise und zeigt dadurch, dass er uns näher steht als die Sonne. Und da der bei einer totalen Sonnenfinsternis über die Erdoberfläche wandernde Kernschatten des Mondes nur eine schmale Zone berührt, kann man daraus schließen, dass der Mond der Erde erheblich näher sein muss als die Sonne und er infolge dessen erheblich keiner sein wird.
Die Breite des auf die Erde fallenden Kernschattens hängt (neben dem Größenverhältnis Sonne/Mond) nachvollziehbar ab von der Entfernung des Mondes zur Erde. Im Apogäum (Mondferne) ist er schmaler, im Perigäum (Mondnähe) breiter.
Im günstigsten Fall ist die Totalitätszone 273 km breit.



Kernschatten des Mondes über der Sahara aufgenommen vom geostationären Satelliten MSG am 29.03.2006

http://de.wikipedia.org/wiki/Sonnenfinsternis#mediaviewer/File:Total_Solar_Eclipse_from_the_Perspective_of_Space.png

Das sagt aber noch nichts über die absoluten Größen und das Größenverhältnis aus.
Ohne eine verlässliche und nachprüfbare Entfernungsdaten (Sonne-Mond-Erde) lässt sich kann der Mond immer noch nahezu jede Größe kleiner als die Sonne haben.

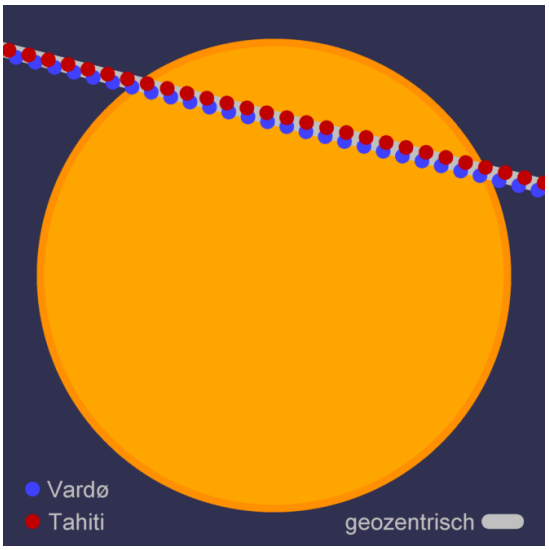
Hinweise zum Größenverhältnis und zum Abstand Sonne-Erde kann die "kleine Sonnenfinsternis" vom 8. Juni 2004 liefern, bei dem die Venus im Laufe des Vormittags bei klarem Himmel vor der Sonnenscheibe vorbeizog:
Diesen Transit haben wir im Schulbiologiezentrum mit einer Schulklasse beobachtet.

Die mit Hilfe eines 114mm Spiegelteleskops auf eine weiße Scheibe projizierte Sonnenscheibe zeigte einen winzigen runden Punkt:
Kein "Sonnenflecken" sondern die langsam vor der Sonne vorbeiwandernde Venus.

Fotos: Ingo Mennerich

Der von der Venus erzeugte Schatten reicht natürlich nicht bis auf die Erde. bleibt es beim Transit im Gegensatz zur Kernzone einer totalen Sonnenfinsternis genau so hell wie üblich.

Hätte man diese Aufnahme gleichzeitig an einem anderen weit entfernten Ort gemacht und die beiden Bilder geschickt übereinandergelegt so hätte man mit etwas Mathematik die Größen und Entfernungen der Sonne und der Venus errechnen können.



Diese bei Wikipedia zu findende Schemazeichnung verdeutlicht, dass die Venus an zwei weit entfernten Beobachtungsorten auf der Erde auf leicht gegeneinander versetzten "Wegen" über die Sonnenscheibe zieht.

Da die Position der beiden Orte bekannt ist lassen sich aus diesem als Parallaxenwinkel bezeichneten Unterschied die Größen und Entfernungen bestimmen.

Genau genommen vermisst man die Winkel und Zeitpunkte des Ein- und Austritts vor der Sonnenscheibe

http://de.wikipedia.org/wiki/Venustransit#mediaviewer/File:Venus_parallax_during_the_1769_transit_de.png

Die Abstandsverhältnisse (nicht die absoluten Werte!) zwischen Sonne, Venus und Erde lassen sich aus ihren Umlaufzeiten berechnen. Der Astronom Kepler hat herausgefunden, dass die Quadrate der Umlaufzeiten (T) zweier Planeten sich so verhalten wie die Kuben (dritten Potenzen) ihrer großen Halbachsen, d.h. die maximalen Radien ihrer Umlaufbahnen (a):

$(T_1/T_2)^2 = (a_1/a_2)^3$ (Drittes Keplersches Gesetz).

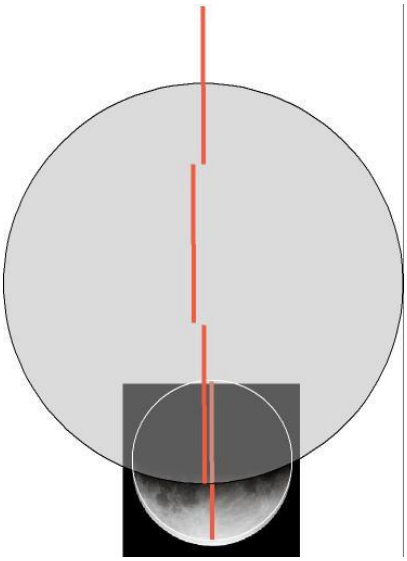
Die Umlaufzeiten waren aus Beobachtungen schon früh bekannt. Nicht bekannt war die Entfernung zwischen Sonne und Erde (AE = Astronomische Einheit) und damit die Größe der Sonne. Erst die genaue Vermessung der Venusparallaxe ermöglichte es, die Entfernungen in absolute Werte zu fassen und die Größe der Sonne zu bestimmen. Heute wissen wir:
Die Entfernung Sonne-Erde beträgt im Mittel 149.597.870 km. Was wir wahrscheinlich weniger im Bewusstsein haben ist, dass diese Messung auf dem geringen Parallaxenwinkel von 8,794148" (Bogensekunden, d.h. dem 3600sten Teil eines Grades) basiert und das dutzende von in alle Welt geschickte Expeditionen notwendig waren um zu diesem Ergebnis zu kommen.

Mondfinsternisse

Wer weiß, wie groß die Erde ist, braucht nur eine Mondfinsternis abzuwarten und ein Foto davon zu machen.
Mondfinsternisse treten nur bei Vollmond auf, d.h. wenn Sonne, Erde und Mond eine Linie bilden.

Bei einer Mondfinsternis wandert der Mond langsam in den Schatten der Erde hinein.
Aus der Form des gekrümmten Schattenrandes lässt sich schließen, dass die Erde größer ist als der Mond:

Der Mond beim Eintritt in den Schatten der Erde (Wikipedia „Moon Eclipse“)



Ergänzt man den Schattenrand der Erde zum Kreis könnte man daraus schließen, dass der Durchmesser der Erde etwa 2 1/2 mal so groß sein muss wie der Mond.

Der Erddurchmesser beträgt 12742 km.
Die Größe des Mondes, d.h. sein Durchmesser läge nach der obigen Rechnung bei 5097 km.

Gymnastikball Ø 55 cm

Fußball Ø 22 cm

Das Größenverhältnis Erde-Mond entspräche also einem großen blauen Gymnastikball und einem Fußball. Trägt man den Fußball so weit weg, dass er "Mondgröße" hat, könnte man die "Mondentfernung" relativ zum Durchmesser der Erde und des Mondes berechnen.
Der Fußball ist in etwa 17 m Entfernung so groß wie der Mond:

Daraus folgt:

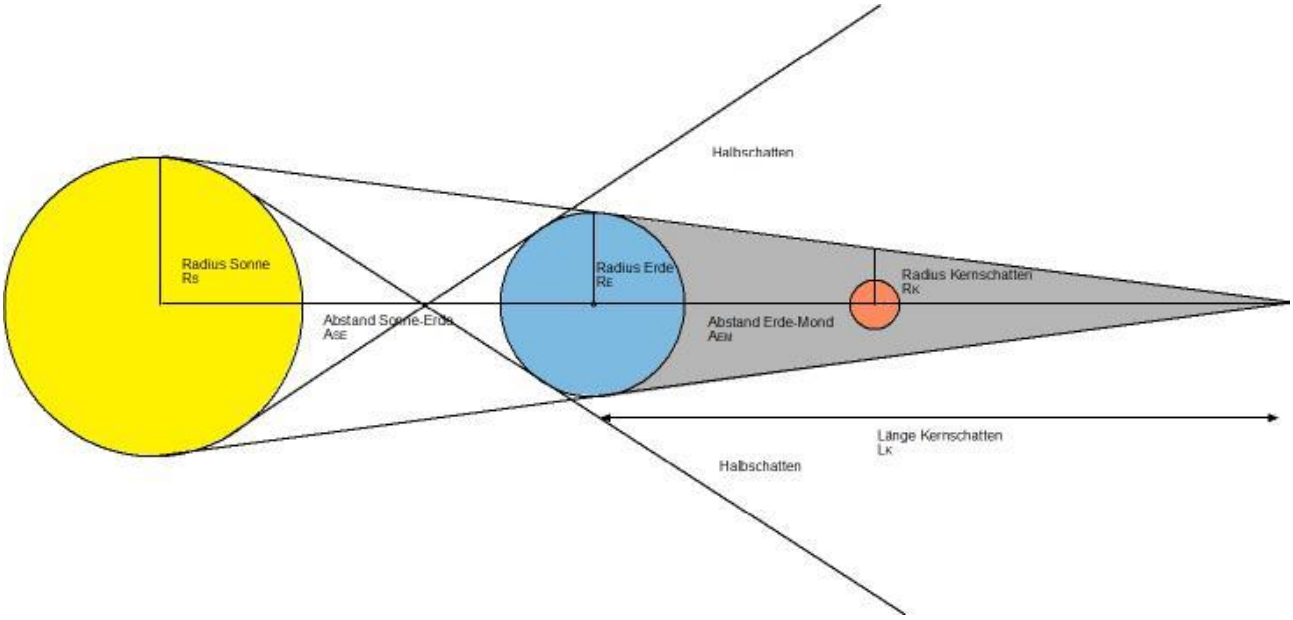
X / 0,016 km = 12742 km / 0,00055 km =

370673 km

Kann man wirklich, nur mit einem, vielleicht aus dem Internet heruntergeladenen Foto des teilweise verfinsterten Mondes, einem Gymnastikball und einem Fußball die Mondentfernung bestimmen?
Im Prinzip schon und das Ergebnis stimmt mit dem "offiziellen" Wert 384400 km recht gut überein.

Leider haben die Beobachtung und die daraus folgende Rechnung noch einen Haken der das Ergebnis verfälscht.
Die Entfernung Sonne-Erde ist im Verhältnis Erde-Mond zwar groß, nichts desto trotz aber endlich. Außerdem ist die Sonne um ein Vielfaches größer als die Erde.
Wie die nicht maßstäbliche Zeichnung zeigt wird die Erde nicht von parallel laufenden, im Unendlichen endenden, sondern hinter der Erde konvergierenden „Sonnenstrahlen" umhüllt.

Es gibt "totale" und "partielle" Mondfinsternisse Im ersten Fall erscheint der Mond bis auf ein rötliches Restlicht vollständig verfinstert. Im Fall einer teilweisen Finsternis scheint entweder ein mehr oder weniger scharfer gekrümmter Schattenrand über den Mond zu ziehen und/oder der Mond wird nur schwach verfinstert.
Die Rede ist von "Kernschatten" und "Halbschatten":



R_S = Radius der Sonne
R_E = Radius der Erde
A_{SE} = Abstand Sonne-Erde
L_K = Länge des Kernschattens der Erde
A_{ME} = Abstand Mond-Erde
$R_{K(Mond)}$ = Radius des Kernschattens der Erde im Abstand A_{ME}
Berechnung Länge des Kernschattens der Erde

$$\frac{R_S}{A_{SE} + L_K} = \frac{R_E}{L_K}$$

Berechnung Breite des Kernschattens über dem Mond

$$\frac{R_E}{L_K} = \frac{R_{K(Mond)}}{L_K - A_{EM}}$$

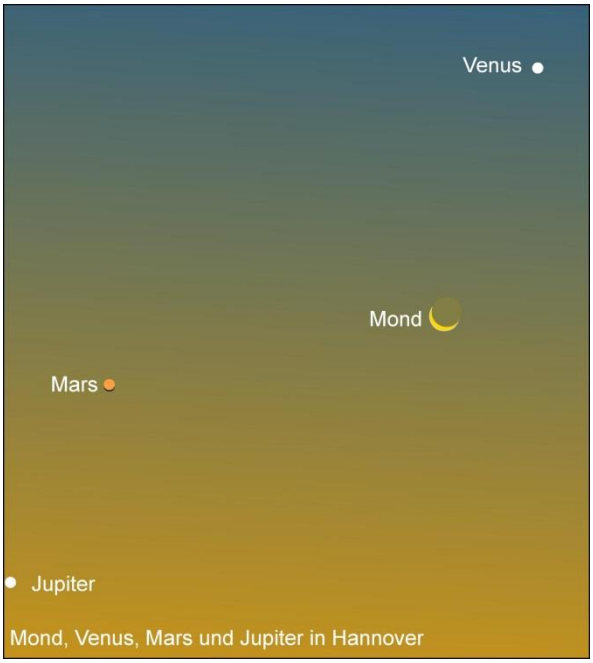
Mond"vermessung" mit Kamera und Geodreieck

5 Freunde, Kathrin aus Hannover, Lasse in Trondheim, Ahmet in Tunis, Youssouf in Douala und Lucy in Kapstadt haben sich im Rahmen eines weltweiten Astronomie-Projekts ihrer Schulen im Internet kennen gelernt. Sie haben sich heute verabredet um herauszufinden, ob man mit einem Zirkel, einem Lineal und einem Geodreieck herausfinden kann, wie weit der Mond von der entfernt ist. Natürlich wissen sie das längst. Die fünf Freunde aber fasziniert die Frage, ob ihre selbst erdachte Methode funktioniert und ob sie exakte Ergebnisse liefert.

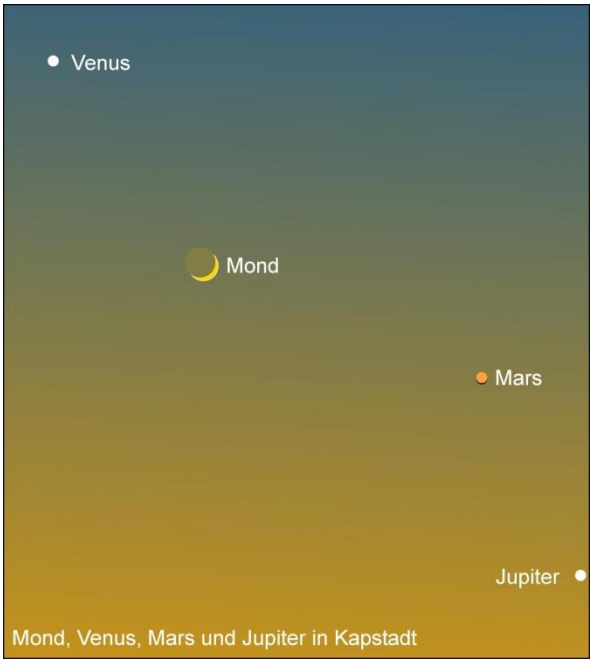
Wie sind sie auf diese Idee gekommen?

Manchmal „treffen“ sich mehre helle Planeten am Himmel, z.B. Jupiter, Saturn, Venus und Mars. Oft gesellt sich auch noch die schmale Sichel des Mondes dazu, dann kann man selbst mit dem Handy schöne Aufnahmen machen. Bei schmalem Mond gelingt das besser als bei einem alle anderen hellen Objekte überstrahlenden Vollmond!

Auf den beiden Fotos stehen Jupiter, Mars, die Venus und der abnehmende Mond eng beieinander am morgendlichen östlichen Himmel. Die Aufnahme links wurde in Hannover, die Aufnahme rechts zur gleichen Zeit in Kapstadt gemacht:



Mond, Venus, Mars und Jupiter in Hannover



Mond, Venus, Mars und Jupiter in Kapstadt

Abgesehen davon, dass der Himmel in Kapstadt „seitenverkehrt“ erscheint fällt auf, dass der (scheinbar verkehrt herum stehende) Mond in Kapstadt eine andere Position hat als in Hannover. Der Mond und die Planeten "wandern" in Hannover aus östlicher in südliche Richtung, also nach rechts. In Kapstadt bewegen sie sich aus östlicher in nördliche Richtung, also nach links.

Legen wir beide „Fotos“ übereinander und verbinden die hellsten Objekte (Venus, Jupiter, Mond) mit Linien beträgt der Unterschied etwa 1 ½ Mondscheiben.

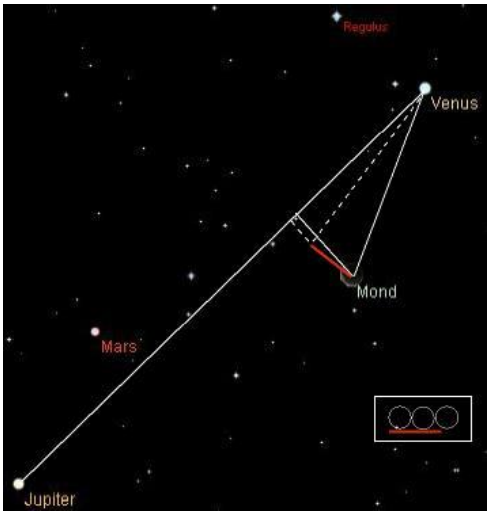
Mond, Venus, Mars und Jupiter als "Fotomontage"

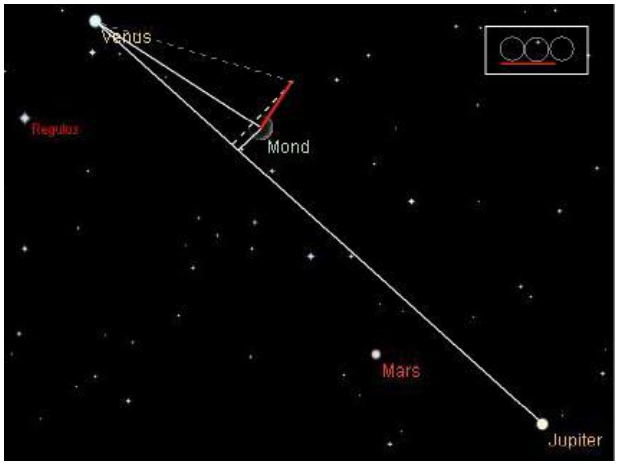
Bei dieser "Fotomontage" wurde das in Hannover gemachte Bild um 90° gespiegelt und in das Bild aus Kapstadt hineinkopiert. Die drei Planeten dienen als Fixpunkte. Die beiden gegeneinander verschobenen "Monde" zeigen den Perspektivwechsel zwischen Hannover und Kapstadt.

Die Fotos und die "Fotomontage" sind nicht echt. Die Bilder zeigen den Morgenhimmel am 5. Oktober 2015 so wie er sich in Kapstadt und Hannover bieten könnte. Sie sind aber Artefakte, die mit Hilfe des Astronomie-Programms "Redshift" und des Grafikprogramms "Freehand" entstanden.

"Redshift" zeigt den Sternenhimmel zu jeder Tageszeit an jedem Ort.

Die beiden folgenden Abbildungen zeigen im (schwarzen) Hintergrund den gleichen Himmelsausschnitt, so wie er sich bei "Redshift" bietet, ohne die Funktion "natürliche Himmelsfarbe". Die Verbindungslinien wurden mit "Freehand" hinzugefügt. Das erlaubt eine genauere Vermessung.

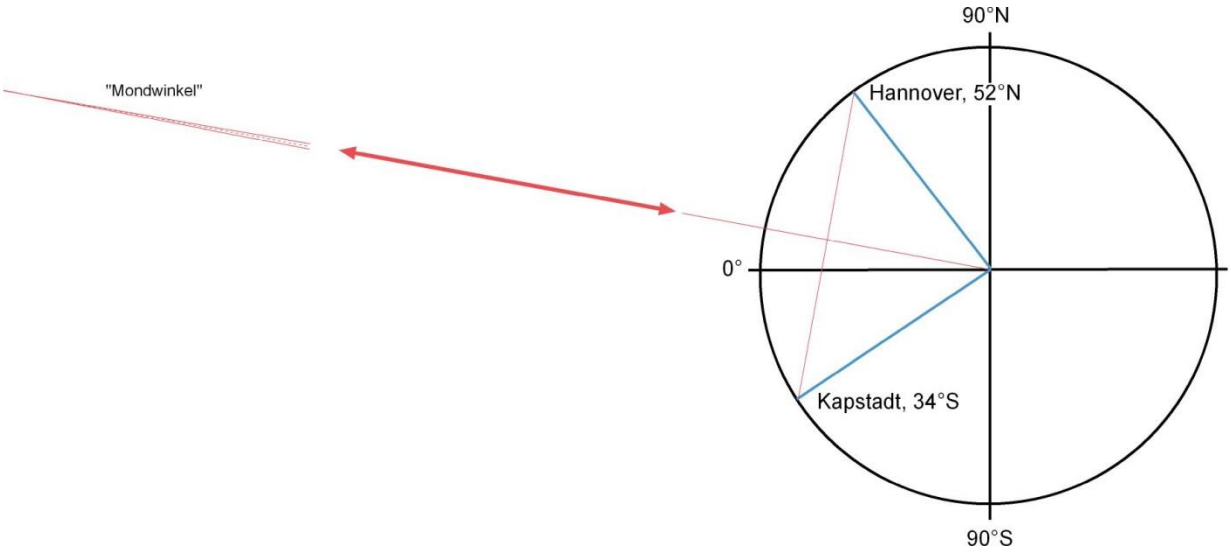




Hannover Kapstadt
("Redshift", Linien "Freehand")
Die Länge der roten Linie entspricht dem Positionsunterschied des Mondes in Hannover und Kapstadt. Der Vergleich mit der Größe der Mondscheibe (0,5°) zeigt, dass die so gemessene Parallaxe etwa 2 1/4 Mondscheiben, also 1,125° entspricht.

Wenn man sich mit Papier, Zirkel und Schere eine „Erde“ herstellt, kann man die geographischen Breiten der beiden Orte (52°N und 33°S) ausgehend vom Kreismittelpunkt als Winkel einzeichnen. Der Einfachheit halber wird die „Schiefe“ der Erdachse ignoriert und die „Erde“ aufgerichtet. Die Pole stehen also in der Senkrechten oben (90° N) und unten (90° S), der Äquator (0°) bildet eine horizontale Linie. Die nachfolgende Konstruktion sollte auf der Rückseite einer ausreichen langen Tapetenrolle gezeichnet werden.
„Hannover“ und „Kapstadt“ werden miteinander verbunden. Auf dieser Strecke wird die Mittelsenkrechte durch den „Erdmittelpunkt“ gezogen.
Wie weit muss der „Mondwinkel“ (gemessen: 1,125°) auf der Mittelsenkrechtsenkrechten von der Erde weg geschoben werden bis die Schenkel dieses kleinen Winkels „Hannover“ und „Kapstadt“ berühren? Wie viele "Erden" passen auf diese Strecke?

Ohne Kenntnis der Größe der Erde kann man die Distanz Erde-Mond nur in Erddurchmessern, nicht aber in absoluten Zahlen angeben. Durch die Bestimmung der Mittags-Sonnenhöhe an zwei Orten, deren Entfernung voneinander bekannt ist, kann man den Umfang und den Radius unseres Planeten berechnen ("Methode Eratosthenes") und damit auch die Mondentfernung.

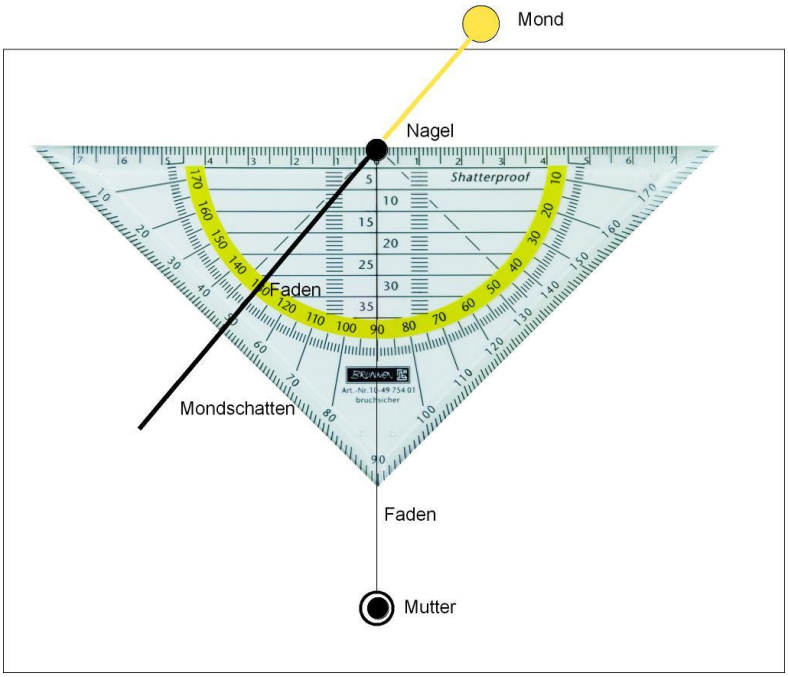


Mond"vermessung" mit dem Geodreieck

"Planetentreffen" mit dem Mond in der Nähe sind nicht selten, aber nicht alltäglich. Hier kann man die relativ zum Mond sehr weit entfernten Planeten als Fixpunkte benutzen.
Der Vollmond (oder jede andere Mondphase) dagegen tritt sehr verlässlich einmal pro Monat auf, allerdings nicht immer in der Nähe heller Sterne.
Ersatzweise bietet sich eine andere Technik an: Kann man aus der - gleichzeitig an mehreren Orten gemessenen - Höhe des Mondes auf die Mondentfernung schließen?
Die Position des Mondes vor dem Hintergrund der offensichtlich viel weiter entfernten Planeten und Sterne ist abhängig vom Beobachtungsort. Das gilt auch für die Sonne, nur ist der Unterschied zwischen auch entfernten Beobachtungsorten viel geringer. Daraus können wir schließen, dass die Sonne viel weiter von der Erde entfernt ist als der Mond.

Die "Fünf Freunde" messen die Höhe des Mondes über dem Horizont zum - je nach Ort unterschiedlichen - Zeitpunkt des "Meridiandurchgangs", also wenn der Mond genau im Süden, bzw. auf der Südhalbkugel im Norden steht.
Der Mond steht in der Nacht vom 4. auf den 5. Januar im Sternbild „Zwillinge“.
Alle fünf Freunde warten, jeder an seinem Ort darauf, dass der Vollmond gegen Mitternacht genau im Süden steht. Dann messen sie die Winkelhöhe des Mondes über dem Horizont.
In Trondheim, Hannover und Tunis steht der Mond im Süden. In Douala und Kapstadt steht er im Norden.

Die „Höhe“ des Mondes messen sie mit einem einfachen Gerät,, dass sie sich aus einem Geodreieck gebastelt haben:



Das Geodreieck haben sie auf ein Brett geklebt, im „Nullpunkt“ einen Nagel eingeschlagen und an diesen einen mit einer Eisenmutter beschwerten Faden geknotet.
Der Trick mit der Höhenmessung des Mondes besteht darin, dass der Nagel einen Schatten auf das zum Lichteinfall längs gehaltene und mit der 90°-Spitze senkrecht nach unten zeigende Geodreieck wirft. Der senkrecht fallende Faden hilft bei der exakten Ausrichtung.
Im abgebildeten Fall steht der Mond 50° hoch.
Je größer das Geodreieck und je weiter die Zwischenräume zwischen den Skalenmarkierungen, desto genauer kann die Ablesung werden.

Die "Mondhöhen" hätten die fünf Freunde auch mit einem Sextanten oder mit Hilfe eines Astronomie-Programms nachschlagen können:

		Breite, Länge	Zeitpunkt Kulmination	Höhe	
Lasse	Trondheim	63° 26´N, 10° 24´O	00 h 10 min	43° 52´	Im Süden
Kathrin	Hannover	52°22´N, 9°43´O	00 h 13 min	55°04´	Im Süden
Ahmet	Tunis	36° 49´N, 10° 12´O	00 h 11 min	70°49´	Im Süden
Youssouf	Douala	4°4´N, 9°43´O	00 h 12 min	75°53´	Im Norden
Lucy	Kapstadt	33°56´S, 18°28´O	23 h 37 min	37°21´	Im Norden

Daten aus REDSHIFT

Wenn mit diesen Daten gerechnet wird lässt sich die Mondentfernung mit Hilfe der Geometrie relativ genau bestimmen. Jeweils zwei Orte auf der Erde und der Mond bilden ein Dreieck, dessen beide der Erde anliegenden Winkel sehr groß sind im Vergleich zum Winkel im Mond (Mond-Parallaxe). Selbst zwischen zwei weit entfernten Orten bewegt sich die Mond-Parallaxe im Bereich von einem halben bis anderthalb Grad.

Kleine Messungenauigkeiten führen zu großen Fehlern bei der Entfernungsbestimmung.

Die fünf Freunde wollen die Messung bewusst „einfach“ halten und

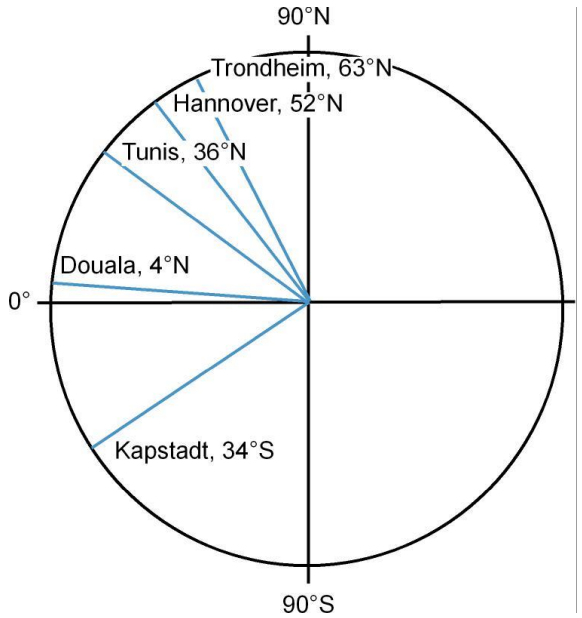
- schlagen die geographische Breite ihrer Orte nicht im Internet nach, sondern messen die „Höhe“ des senkrecht über dem Nordpol „stehenden“ Polarsterns über ihrem Horizont.
- verlassen sich auf die „Höhe“ des Mondes, so wie sie sie mit dem Geodreieck messen können.
- achten nicht auf die geographische Länge ihrer Orte sondern nur auf den Zeitpunkt, an dem der Mond an ihrem Ort genau im Süden steht. Dabei gilt aber: Die Zeitpunkte der Messungen dürfen nicht zu weit auseinander liegen.

Sie werden ihre Messergebnisse diskutieren und ihre zeichnerischen und rechnerischen Ergebnisse mit genauen Daten, die man in astronomischen Ephemeriden-Programmen (z.B. „Redshift“ oder „StarGazer“ nachschlagen kann, wiederholen.

Lasse	Trondheim	63° N	44°	Im Süden
Kathrin	Hannover	52° N	55°	Im Süden
Ahmet	Tunis	37° N	71°	Im Süden
Youssouf	Douala	4° N	76°	Im Norden
Lucy	Kapstadt	34°´S	37°	Im Norden

Sie messen und tauschen ihre Werte im Internet aus.

Dann nimmt jeder einen Zirkel, ein Geodreieck und ein langes Lineal zur Hand und versucht sich an einer zeichnerischen Lösung.

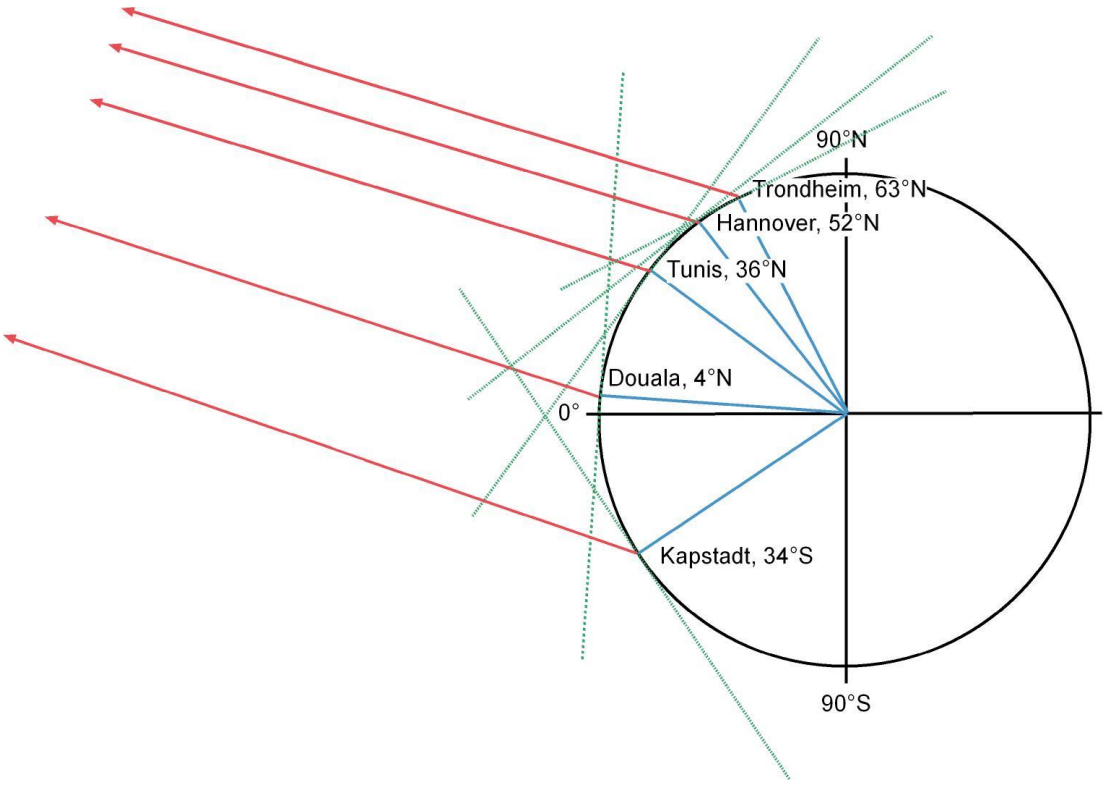


Die „Erde“ wird mit dem Zirkel als kreisförmige Scheibe auf Papier gezeichnet, zweimal so gefaltet, dass der Kreis in vier Sektoren aufgeteilt wird, ausgeschnitten und auf ein Blatt Papier geklebt.

Entlang der Faltachsen werden die Nord-Süd-Achse und die Äquatorebene gezeichnet. Sie sind in der Zeichnung schwarz dargestellt. Damit sind 90°N, 90°S und 0° Breite festgelegt. Der nächste Schritt ist das Abtragen der geographischen Breite der Orte im „Erdmittelpunkt“ (z.B. 52°N = 52° zur Äquatorebene).
Diese Winkel sind blau gezeichnet.

Die lokalen „Horizontebenen“ stehen als Tangenten senkrecht dazu (grün gestrichelt).

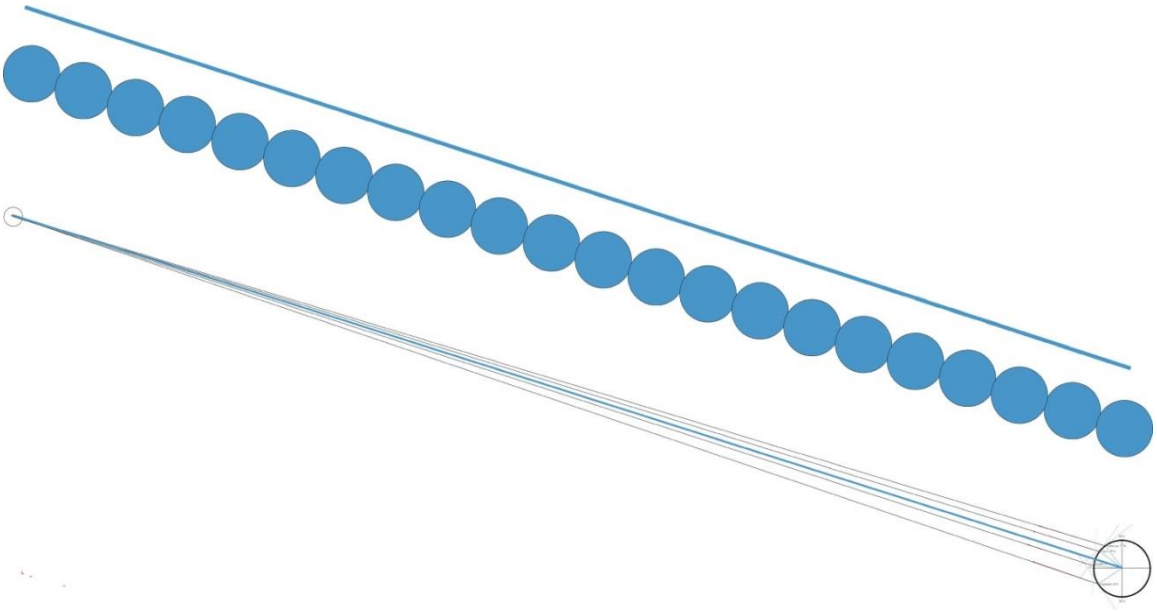
Die an den jeweiligen Orten gemessenen Höhen des Mondes über dem Horizont bilden Winkel zur Horizontebene. Sie sind rot gezeichnet.



Beim Zeichnen merken sie, dass die Linien „Richtung Mond“ nicht keine Parallelen sind sondern auf einen fernen, weit außerhalb des gewählten Papiers liegenden Punkt zu zulaufen scheinen

- Benötigt wird daher ein sehr langes Blatt Papier, z.B. eine Tapetenrolle
- Und sehr viel Geschick beim immer wieder erneuten Anlegen des Lineals:
  Der Mond scheint doch ein ganzes Stück von der Erde entfernt zu sein.

- Genauer und flexibler handhabbar ist es, wenn in jeden der Orte eine Nadel gesetzt und daran ein langer Faden gebunden wird. Die Fäden werden über den mit Geodreieck und Lineal gezogenen "Mondhöhen" straff gezogen. Dort wo sie zusammenlaufen steht der Mond.



Im Idealfall, genaues Messen und genaues Zeichnen vorausgesetzt, konvergieren die Linien im Abstand von etwa 30 Erddurchmessern im Mond.
Die Erde hat einen Durchmesser von 2 x 6371 = 12742 km.
Der Distanz Erde – Mond wäre danach 12742 km x 30 = 382260 km

Kennt man die Entfernung, kennt man die Größe

Wenn der Mond unter einem gemessenen Winkel von 0,5° Grad erscheint, dann lässt sich mit der so bestimmten Entfernung auch seine Größe berechnen:

Formel: Winkelgröße/360° = Größe/Entfernung*2π

nach "Größe" umgestellt:

Größe = (Winkelgröße/360°)*(Entfernung*2π)

(0,5°/360°)*(382260km*2π) = 3336 km (tatsächlicher Durchmesser: 3476 km)

Wenn man mit dem Tangens rechnet erhält man das gleiche Ergebnis:
Hier muss man mit dem halben Winkel rechnen und erhält als Ergebnis den Radius

Radius/Entfernung = tan(Winkelgröße/2)
r = tan(α/2)*d

r = tan(0,5/2)*382260km = 1668 km
d = 2*r = 3336 km

Nochmal: Der Mond mit der Kamera

Hier zwei Fotos des Vollmondes vor dem Sternenhintergrund im Sternbild "Zwillinge", beide von den "Fünf Freunden" zum gleichen Zeitpunkt gemacht, einmal aus der Perspektive Trondheim (Norwegen) und einmal von Kapstadt (Südafrika) aus gesehen.

Trondheim: Nacht 04./05.2015
Vollmond genau im Süden

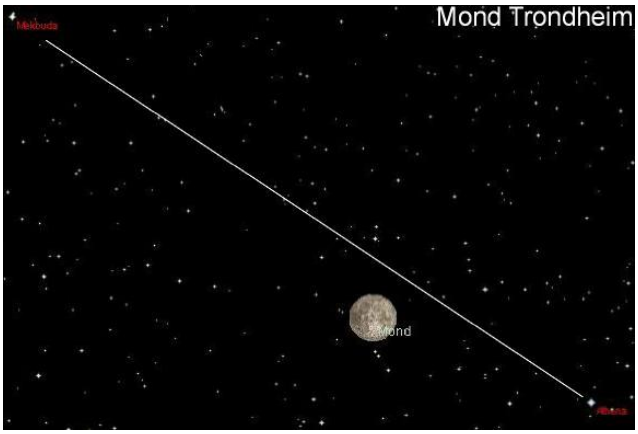
Kapstadt, Nacht 04./05.2015:
Vollmond, genau im Norden

Die beiden „Aufnahmen“ werden in der gleichen Nacht zu der Zeit gemacht, als der im Sternbild der „Zwillinge“ stehende Mond seine Kulminationshöhe, d.h. seinen höchsten Stand über dem Horizont erreicht. Auch diese Aufnahmen sind mit "Redshift" hergestellte Artefakte: In Wirklichkeit überstrahlt der helle Vollmond den Sternenhintergrund.
Prinzipiell gelingt diese Art der Vermessung zu jeder Mondphase, also auch dann, wenn der Mond nicht so hell ist. Der Vollmond oder im nahe Phasen haben jedoch den Vorteil, dass der Zeitpunkt der "Kulmination", also der höchsten Position über dem Horizont, nachts und damit zu einer Zeit stattfindet, zu der der Mond verlässlich zu sehen ist. In Trondheim stand er dabei genau im Süden, in Kapstadt genau im Norden.

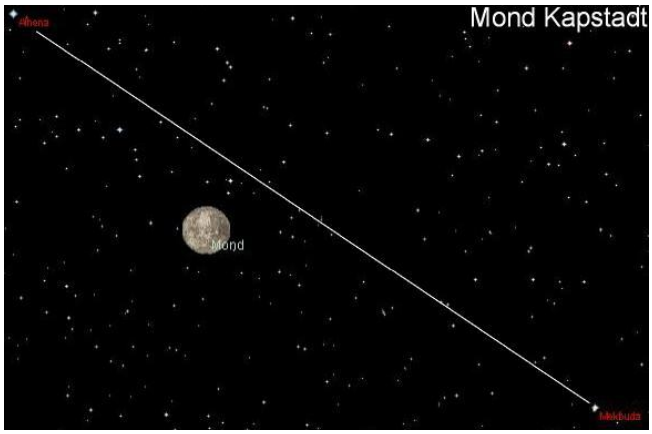
Auf den ersten Blick scheint es keine Unterschiede zu geben.
Bei näherer Betrachtung allerdings fällt auf, dass

- der Mond nicht vor dem gleichen Sternenhintergrund steht
- die beiden hellen Sterne in der oberen linken und unteren rechten Ecke der Bilder vertauscht sind. Die beiden Sterne sind Teil des Sternbilds "Zwillinge" und heißen "Mekbuda" und "Alhena".

Zieht man eine Verbindungslinie zwischen Mekbuda und Alhena, rückt der Mond in Trondheim näher an diese Linie heran als in Kapstadt.



Trondheim:
„Mekbuda“ links oben, „Alhena“ rechts unten,
Mond unterhalb der Linie „Mekbuda-Alhena“,
geringere Entfernung von der Verbindungslinie
Der Mond steht „aufrecht“ („Mann im Mond“)



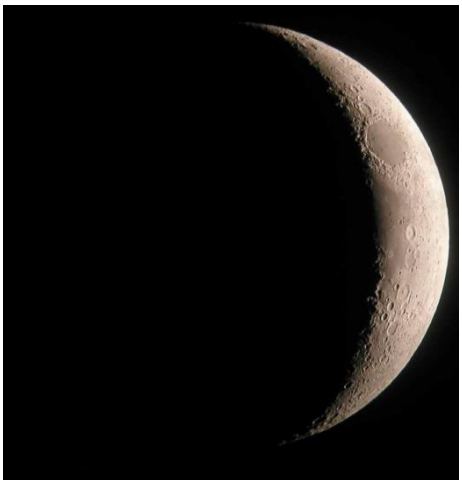
Kapstadt:
„Mekbuda“ rechts unten, „Alhena“ links oben,
Mond unterhalb der Linie „Alhena-Mekbuda“,
größere Entfernung von der Verbindungslinie
Der Mond steht „auf dem Kopf“

Der Vollmond in Trondheim
steht "richtig herum"

Der Vollmond in Kapstadt
Steht auf dem Kopf"?
(Oder ist es in Wirklichkeit anders herum?)

Wenn man sich der Illusion hingibt, dass man hoch im Norden mehr oder weniger aufrecht steht „hängt“ man tief im Süden gewissermaßen mit dem Kopf nach unten.

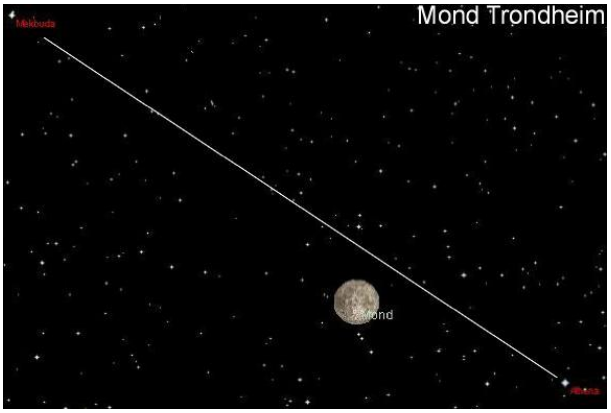
Auf der Südhalbkugel steht der auch bei uns sichtbare Teil des Sternenhimmel –und natürlich auch der Mond – verkehrt herum. Die Sonne und der Mond gehen dort, wie bei uns, im Osten auf und im Westen unter, die Sonne steht mittags aber im Norden. Der Mond erreicht seinen höchsten Stand nicht wie bei uns im Süden, sondern im Norden, der „Mann im Mond“ steht auf dem Kopf und die gute alte Regel mit dem altdeutschen „z“ (wie zunehmend) und „a“ (wie abnehmend) ist ins Gegenteil verkehrt.



Zunehmender Mond in Trondheim

Zunehmender Mond in Kapstadt

Dreht man die Aufnahme „Kapstadt" um 180 Grad so dass „Mekbuda“ und „Alhena“ an der gleichen Stelle, also oben links bzw. unten rechts, stehen ergibt sich ein ganz anderes Bild:



Originalbild „Trondheim“

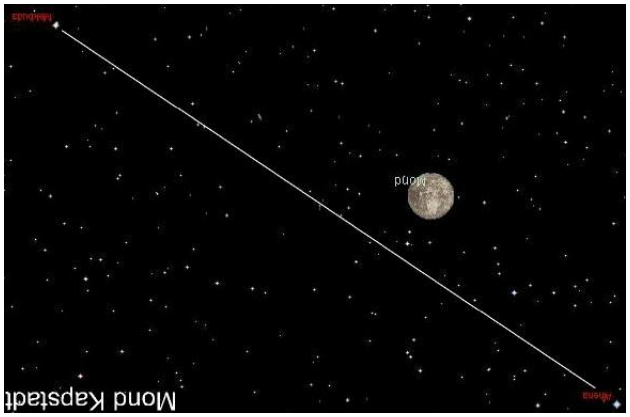


Bild „Kapstadt“ um 180° gedreht

Jetzt steht „Mekbuda“ sowohl in Trondheim als auch in Kapstadt oben links und „Alhena“ unten rechts. Der Mond steht in Trondheim unterhalb („südlich“) der Linie Mekbuda-Alhena, in Kapstadt nördlich davon.

Der Mond selbst ist in beiden Orten etwa ein halbes Grad „groß“. Da der Mond gerade im Süden bzw. Norden steht und die „Kamera“ waagerecht gehalten wird, kann man davon ausgehen, dass die Nord-Süd-Linie senkrecht verläuft. Damit unterscheidet sich die Position des Mondes um etwas mehr als 2 Mondscheibendurchmesser, also um etwas mehr als 1°.

Wenn man die beiden Bilder übereinander legt stehen die beiden „Monde“ nicht genau senkrecht zueinander. Das ist damit zu erklären, dass Kapstadt etwas östlicher liegt als Trondheim und der Mond daher etwas früher kulminiert. Während dieser Zeit ist er auf seiner Bahn um die Erde ein kleines Stück weitergewandert. Im Idealfall sollten daher, um solche Ungenauigkeiten zu vermeiden, alle Beobachtungsorte auf dem gleichen Längengrad liegen.

Mond"vermessung" mit dem Taschenrechner

Beobachtungsorte Hannover-Kapstadt:

Bekannt:

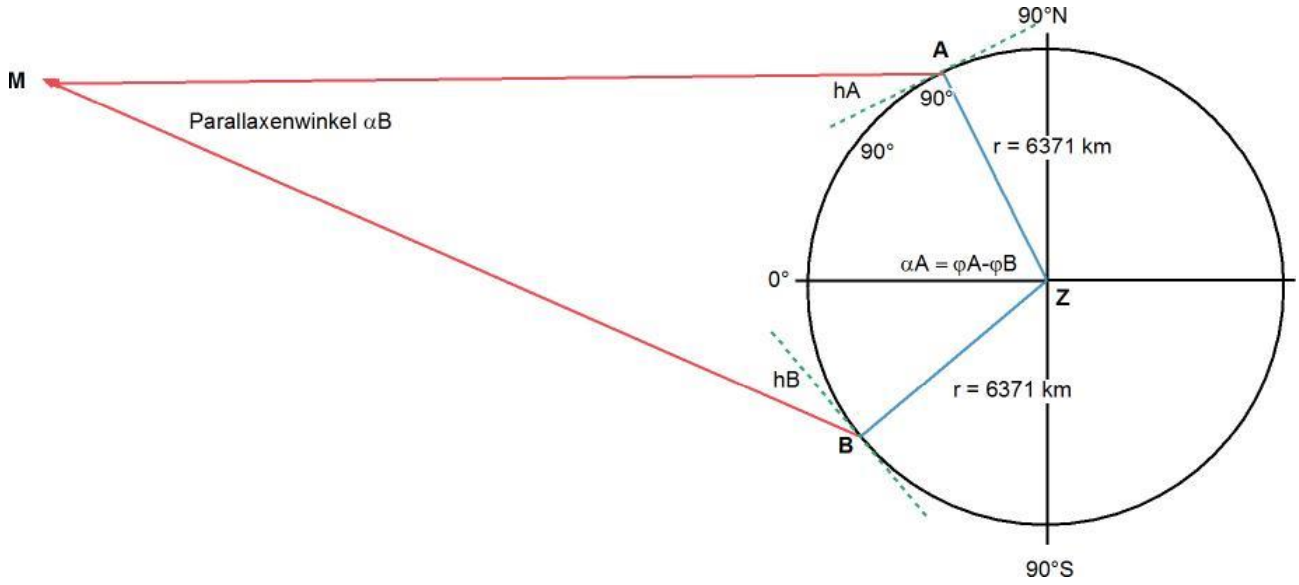
- Geographische Breite der Beobachtungsorte
  Hannover: A = 52°22´= 52,37°
  Kapstadt: B = -33°56´= -33,93°

- Radius der Erde: 6371 km

- Winkelhöhe des Mondes über dem Horizonts (beim Meridiandurchgang)
  Hannover: hA = 55°04° = 55,07° (Mond steht im Süden):
  Kapstadt: hB = 37°21´= 37,35° (Mond steht im Norden):

Daraus folgt:

- Zentriwinkel im Erdmittelpunkt: $\alpha A = \varphi A - \varphi B$ = 52,37°-(-33,93) = 86,30°



Die Punkte Erdmittelpunkt (Z), Ort B, Mond (M) und Ort B bilden ein Viereck.
Die Winkelsumme im Viereck beträgt 360°.

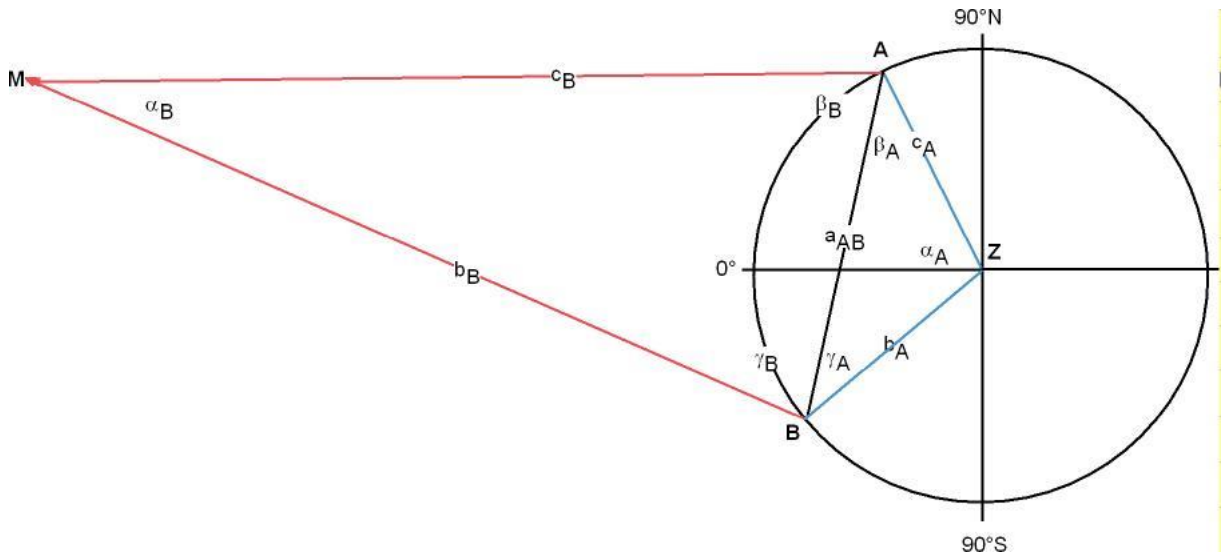
Bekannt

- Zentriwinkel αA im Punkt Z
- Winkel im Punkt A: Winkelhöhe des Mondes hA + 90°
- Winkel im Punkt B: Winkelhöhe des Mondes hB + 90°
- Winkelsumme im Viereck = αB + (90°+hA) + (90°+hB) + αA = 360°

Gesucht: **Parallaxenwinkel** (Mond) αB

$\alpha B = 360° - (90°+hA) - (90°+hB) - \alpha A$

$\alpha B = 360° - (90°+55{,}07°) - (90°+37{,}35°) - 86{,}30°$
$\alpha B = 360° - 145{,}07° - 127{,}35° - 86{,}30° = 1{,}28°$



Berechnung der Streckenlängen AM und BM (Monddistanz bei A und B)

1. Schritt: Viereck in 2 Dreiecke (A,B) zerlegen

- Dreieck A mit den Ecken ABZ
- Dreieck B mit den Ecken ABM

2. Schritt Dreieck A (gleichschenkelig):berechnen

Bekannt:

- Zentriwinkel $\alpha A = 86{,}30°$
- Schenkel AZ bzw. BZ = 6371 km
- Winkelsumme im Dreieck 180°
- Gleichschenkliges Dreieck, daher Winkel in A = Winkel in B: $\beta A = \gamma A$

Daraus folgt:

$\beta A = \gamma A = (180° - \alpha A)/2$

$\beta A = \gamma A = (180° -86{,}30°)/2 = 46{,}85°$

Berechnung der Strecke aA mit dem Sinussatz

$a/\sin\alpha = b/\sin\beta = c/\sin\gamma$

$a/\sin 86{,}30° = b/\sin 46{,}85° = c/\sin 46{,}85°$

$b = c$

Daraus folgt:

$a = (\sin\alpha * b)/\sin\beta$ oder $(\sin\alpha * c)/\sin\gamma$

$a = 8714{,}39$ km

3. Schritt Dreieck B berechnen:

Bekannt:

$aA = 8714{,}39$ km

$\alpha B = 1{,}28°$

Daraus folgt:

$\beta B = (90° + hA) - \beta A$
$\gamma B = (90° + hB) - \gamma A$

$\beta B = 145{,}07° - 46{,}85° = 98{,}22°$
$\gamma B = 127{,}35° - 46{,}85° = 80{,}50°$

Probe: Winkelsumme $1{,}28° + 98{,}22° + 80{,}50° = 180°$

Berechnung der Seite a mit dem Sinussatz

$a/\sin\alpha = b/\sin\beta = c/\sin\gamma$

$aB/\sin\alpha B = bB/\sin\beta B = cB/\sin\gamma B$

Daraus folgt:

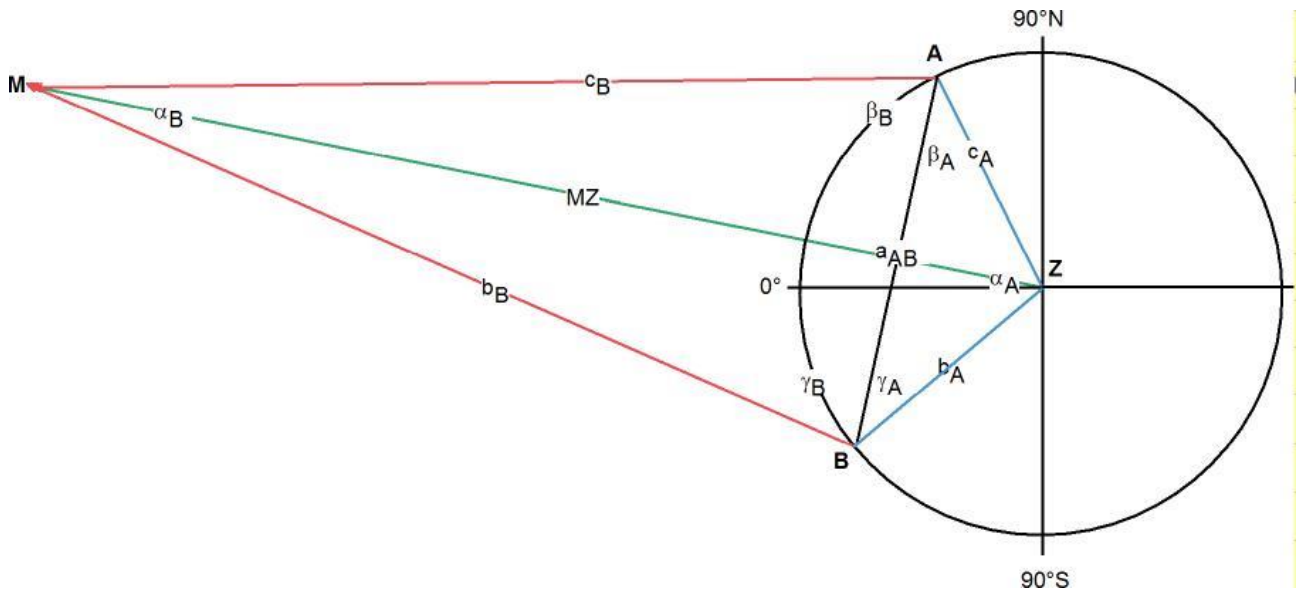
$aB/\sin 1{,}28° = bB/\sin 98{,}22° = cB/\sin 80{,}50°$

$bB = (aB * \sin\beta B)/\sin\alpha B = 386101$ km

$cB = (aB * \sin\gamma B)/\sin\alpha B = 384758{,}7$ km

Demnach ist der Mond etwa 386000 km von Hannover und 385000 km von Kapstadt entfernt.

Wie lang ist die Strecke zwischen dem Erdmittelpunkt und dem Mond?
Diese Strecke (MZ) bildet zusammen den bekannten Seiten cB und cA bzw. bB und bA jeweils ein weiteres Dreieck (MAZ bzw. MBZ). Wir berechnen das Dreieck MAZ



Bekannt:

- Seite cB = 384758,7 km
- Seite cA = 6371 km
- Winkel βB = 98,22°
- Winkel βA = 46,85°
- Winkel in A = βB + βA = 145,07°

Zur Berechnung der Strecke MZ wenden wir den Kosinussatz an:

$\cos\alpha = (b^2 + c^2 – a^2)/2bc$

Umgestellt lautet die Gleichung:

$a^2 = b^2 + c^2 – \cos\alpha*2bc$
a = Wurzel aus $(b^2 + c^2 – \cos\alpha*2bc)$

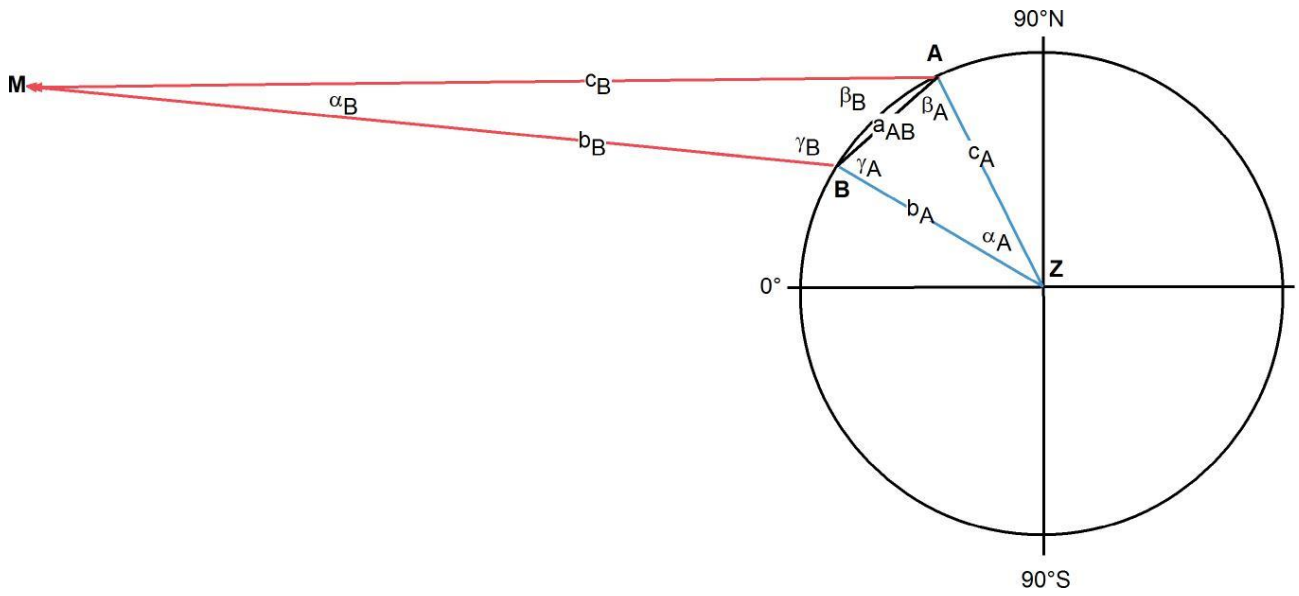
$MZ^2 = cB^2 + cA^2 - \cos(\beta B + \beta A)*2*cB*cA$
$MZ = \sqrt{MZ^2}$

$MZ^2 = 384758{,}7^2 + 6371^2 - \cos 145{,}07*2*384758{,}7*6371 = 1{,}5209\ldots*10^{11}$

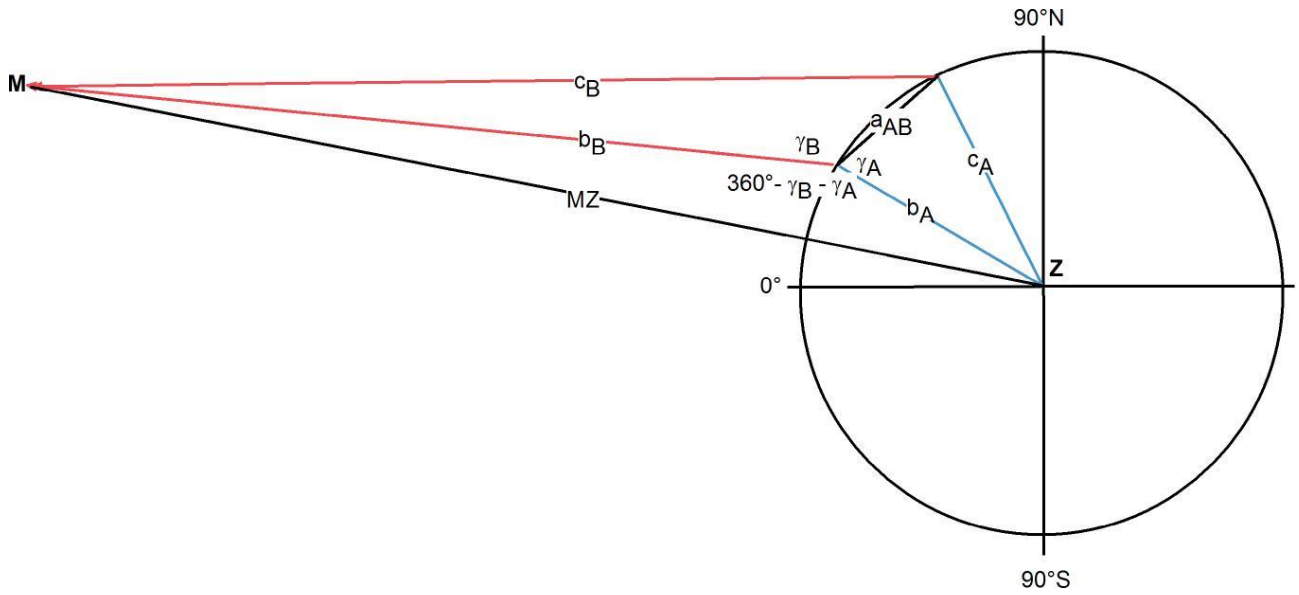
MZ = 389999 km

Damit ist der Mond etwa 390000 km vom Endmittelpunkt entfernt.

Wenn der Mond an beiden Beobachtungsorten im Süden (oder im Norden!) steht, kann genauso vorgegangen werden wie im Fall Hannover-Kapstadt. Allerdings ist der Winkel γB der Gegenwinkel zur gemessenen Mondhöhe: γB = 180° - hB.



Die Strecke MZ (Erdmittelpunkt-Mond) liegt außerhalb der beiden Dreiecke:



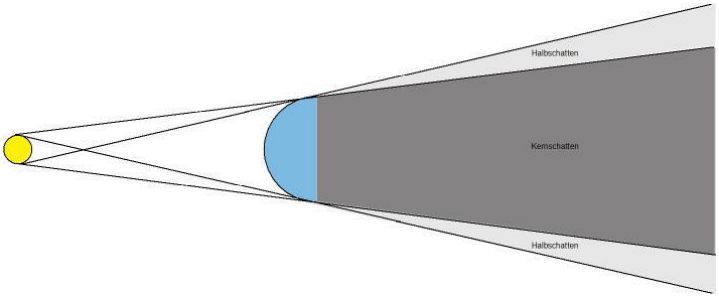
Der der Strecke MZ gegenüber liegende Winkel ist in diesem Fall ist 360° - (γB + γA) groß.

Und noch einmal: Mondfinsternis…

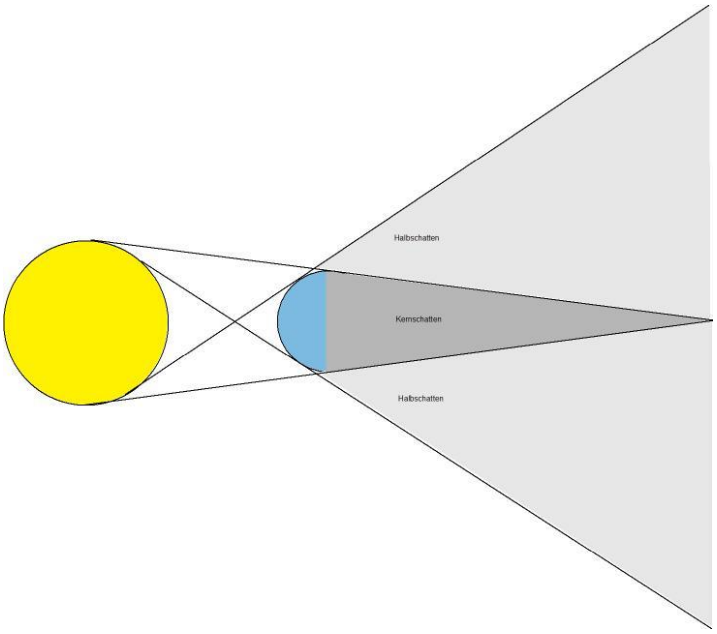
Kann man die Größe des Mondes anhand des bei einer totalen Mondfinsternis auf ihn geworfenen Erdschattens bestimmen?
Größe und Form des Erdschattens scheint darauf hin zu deuten, dass die Erde größer ist als der Mond.
Das könnte ohne Kenntnis der Größen- und Entfernungsverhältnisse prinzipiell aber ein Trugschluss sein

Im Falle, dass die Sonne und Erde gleich groß sind wäre der Erdschatten ein ideales Maß.
Hier gibt es nur einen Kernschatten.

Dass dem nicht so ist zeigt die Beobachtung eines Kernschattens und eines Halbschattens bei einer Mondfinsternis.

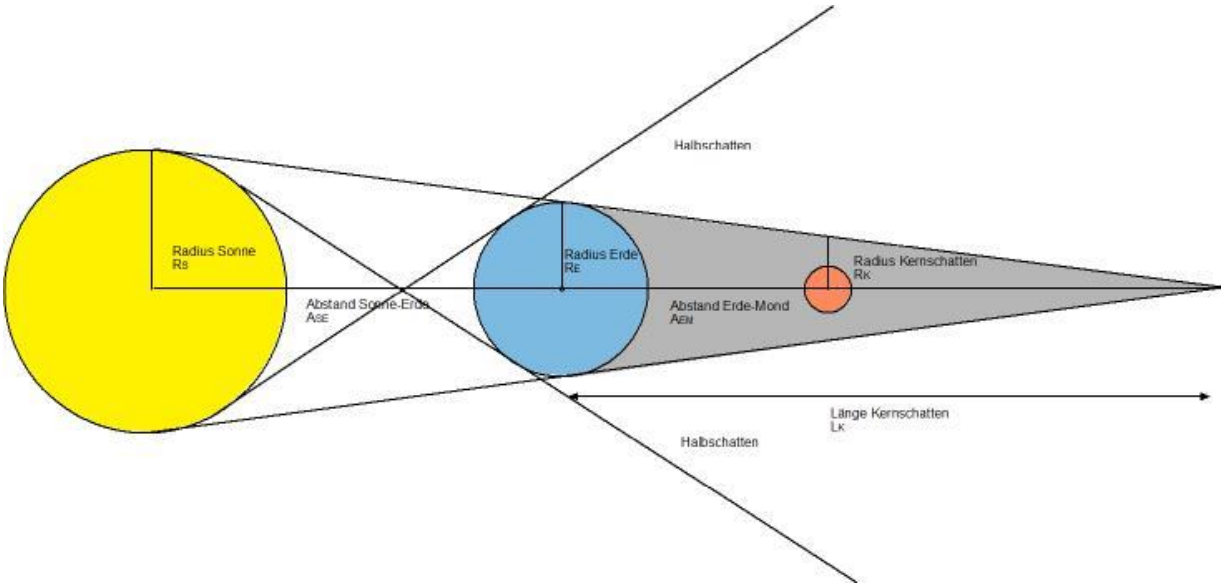


Der Halbschatten entsteht aber auch, wenn die Sonne kleiner wäre als die Erde.



Aber auch, wenn die Sonne größer wäre als die Erde:

Ohne zu wissen, wie weit die Sonne und der Mond von uns entfernt sind, blieben wir auf Vermutungen angewiesen.
Mit den in diesem "Mondprojekt" gemessenen Daten und der daraus gezeichneten und errechneten Entfernung und Größe des Mondes lässt sich die Frage nach der Größe und Länge des Kernschattens auf sichererer Grundlage beantworten:



R_S	= Radius der Sonne
R_E	= Radius der Erde
A_{SE}	= Abstand Sonne-Erde
L_K	= Länge des Kernschattens der Erde
A_{ME}	= Abstand Mond-Erde
$R_{K(Mond)}$	= Radius des Kernschattens der Erde im Abstand A_{ME}

Berechnung der Länge des Kernschattens der Erde

$$\frac{R_S}{A_{SE} + L_K} = \frac{R_E}{L_K}$$

R_S	= 695800 km	A_{SE}	= 149600000 km
R_E	= 6371 km	L_K	= x

Berechnung der Breite des Kernschattens über dem Mond

$$\frac{R_E}{L_K} = \frac{R_{K(Mond)}}{L_K - A_{EM}}$$

R_E	= 6371 km	A_{ME}	= 384600 km
L_K	= x	$R_{K(Mond)}$	= y

Daraus folgt:

- Länge des Kernschattens (R_K):
  x = 1382450,695 km
- Radius des Kernschattens über dem Mond ($R_{K(Mond)}$)
  y = 4598,58 km

Das heißt, der Erdschatten, der auf den Mond fällt ist nur 72% so groß wie die Erde und taugt daher nur in erster Näherung zur Entfernungs- und Größenbestimmung des Mondes.
Als Forschungshypothese, wenn auch nach Überprüfung durch andere Methoden modifiziert, vierdient dieser Ansatz schon Beachtung!