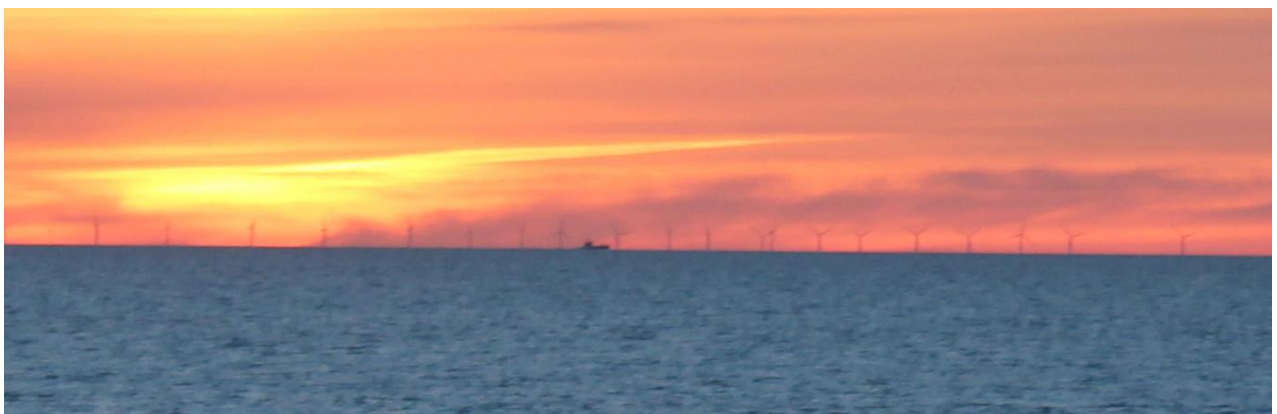
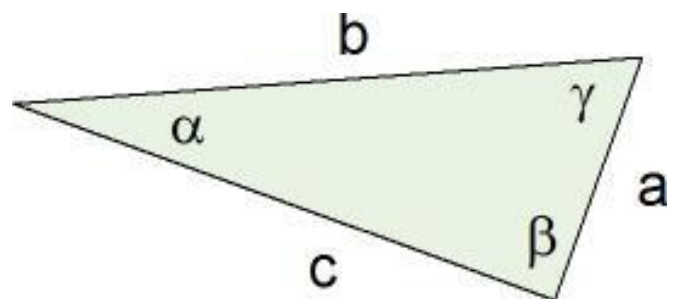
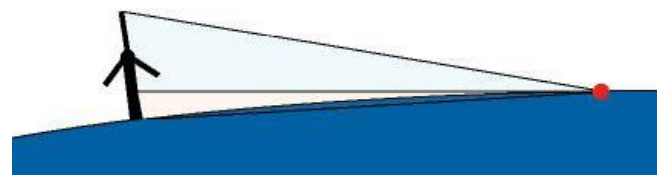
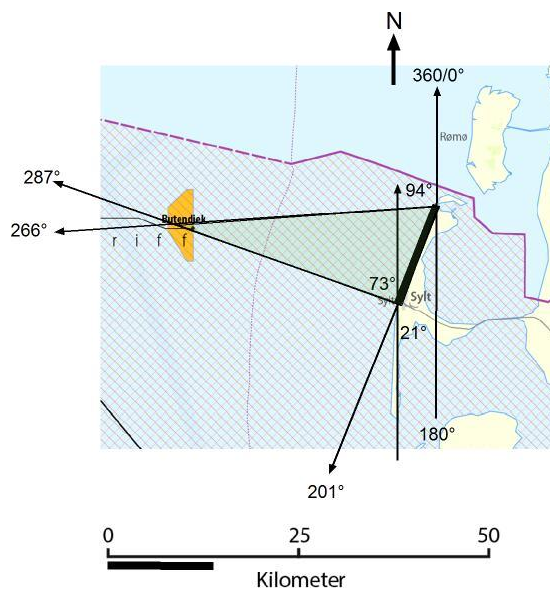


Landeshauptstadt Hannover



19.76

"Geometrie im Strandkorb" II

Windkraftanlagen am Horizont und die Größe der Erde

Mai 2015

Herausgeber: Landeshauptstadt Hannover
Schulbiologiezentrum Hannover

Titel: "Geometrie im Strandkorb" II
Windkraftanlagen am Horizont
und die Größe der Erde

Titelbild: Ingo Mennerich

Arbeitshilfe 19.76

Verfasser: Ingo Mennerich

Herausgeber: Landeshauptstadt Hannover
Fachbereich Bibliothek und Schule
Schulbiologiezentrum
Vinnhorster Weg 2
30419 Hannover
Tel: 0511/168-47665
Fax: 0511/168-47352
E-Mail: schulbiologiezentrum@hannover-stadt.de
Internet: www.schulbiologiezentrum.info

Inhalt

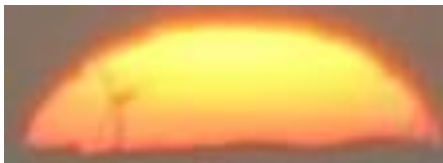
Einige Worte vorweg	3
Die Grundidee.....	4
Größen- und Entfernungsmessung mit Geodreieck, Lineal und Bleistift.....	5
Entfernungsmessung mit dem Taschenrechner.....	6
Entfernungsbestimmung durch Kompasspeilung	6
Wie groß ist die Erde?.....	8

Einige Worte vorweg

Über Windanlagen, on-shore wie off-shore, mag man geteilter Meinung sein.

Viele finden sie gut, aber nicht vor der eigenen Haustür.

In jedem Fall kann man weit draußen im Meer stehende Anlagen benutzen um sich etwas in Geometrie zu üben, einer Disziplin die kaum wie eine andere, forschendes Lernen mit nachprüfbaren Ergebnissen ermöglicht.



Untergehende Sonne hinter dem Windpark "Butendiek"

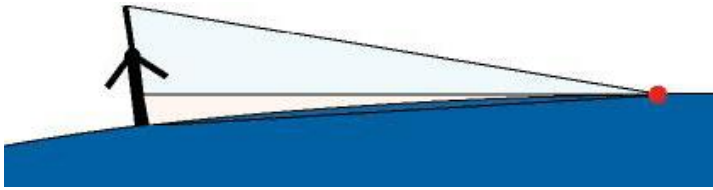
Vor 15 Jahren erschien unsere Arbeitshilfe "Geometrie im Strandkorb" in der wir uns mit einfachen Methoden der Orts-, Abstands- und Höhenmessung beschäftigt haben. Gewissermaßen als "Nachschlag" dazu hier eine (durchgerechnete) Idee, wie man mit Hilfe von (damals noch nicht vorhandenen) Offshore Windanlagen die Größe der Erde berechnen kann.

Wären die alten Griechen in der Lage gewesen, die äolischen Inseln mit Windmühlen von der Höhe unserer "Windparks" zu bestücken, hätte sich die Idee der Kugelgestalt der Erde sicher früher und effektiver durchgesetzt. Und sie hätten sicher genau errechnet, wie groß die Erde ist.

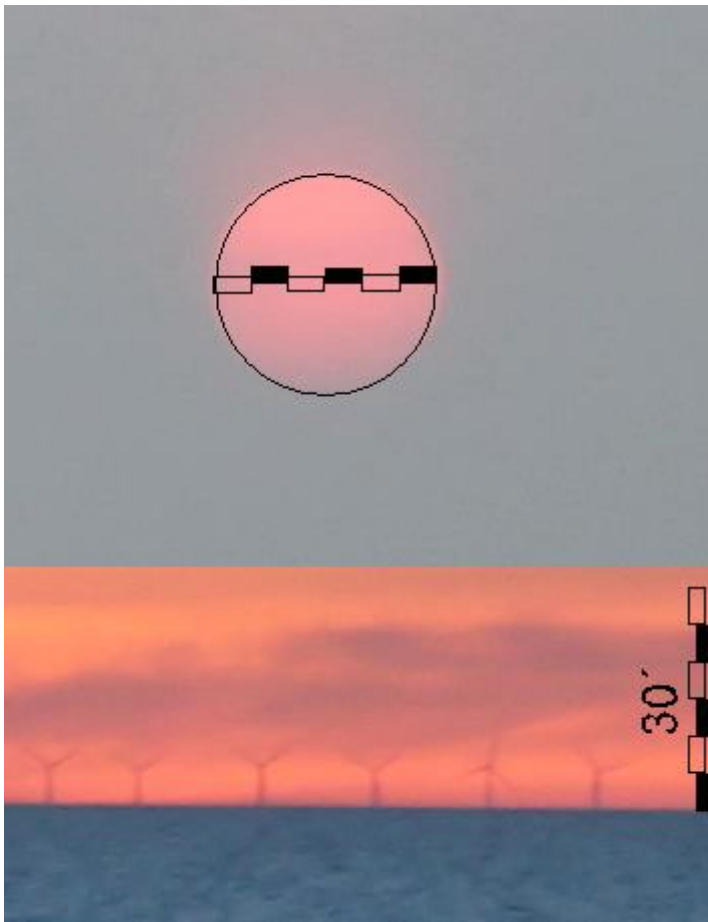
Eratosthenes hat diese Frage durch den Vergleich der Schattenlängen an zwei Orten für seine Zeit hervorragend gelöst. Wir wollen das anhand der ihm noch nicht zur Verfügung stehenden Off-Shore Windparks nachholen.

Alles was man braucht ist ein Fotoapparat (oder fototaugliches Handy), ein Lineal zum Ausmessen der scheinbaren Größen und einen Taschenrechner. Ein Sextant, den man sich auch selbst bauen kann, wäre hilfreich, ist aber nicht zwingend erforderlich.

Die Grundidee



Durch die Erdkrümmung bedingt, sieht man am Strand nur Teile der weit draußen im Wasser stehenden "Windmühlen". Lässt sich aus den Sehwinkeln bestimmen, wie groß und wie weit entfernt sie sind. Lässt sich aus dem unter dem Horizont "verborgenen" Teil die Größe der Erde ermitteln?



Die nebenstehende Montage ist aus Bildern zusammengesetzt die mit derselben Kamera und der gleichen Einstellung des Teleobjektivs gemacht wurden.

Die Sonne hat einen - mit dem selbst gebauten Sextanten gemessenen - Durchmesser von einem halben Grad ($0,5^\circ = 30'$, d.h. 30 Bogenminuten). Die darüber gelegte Skala ist in $5'$ - Abschnitte geteilt.

Die Windanlagen erheben sich etwa $12'$ ($0,2^\circ$) über den Horizont.

Aus dem Sehwinkel kann man entweder ihren Abstand oder ihre Größe ermitteln.

Der unterste Abschnitt der Windanlagen liegt aufgrund der Erdkrümmung unter der Horizontlinie.

Kennt man die Höhe dieses verdeckten Abschnitts kann berechnen, wie groß die Erde ist...

Die Windgeneratoren des Windparks "Butendiek" westlich vor Sylt haben nach den Informationen des Betreibers eine Nabenhöhe von rund 90 m und eine Flügellänge von etwa 60 m. Die Entfernung Sylt - Butendiek beträgt etwa 35 km.

Von der einige Meter über dem Meer gelegenen Promenade am Westerländer Strand aus gesehen tauchen die Flügel am tiefsten Punkt gerade ins Meer ein. Die unteren 30 m der Anlage liegen also (aus der Strandperspektive) unterhalb des Horizonts.

Die sich drehenden Flügelspitzen beschreiben einen Kreis mit dem Durchmesser 120 m ($2 \cdot 60\text{m}$). Sie erscheinen unter einem Sehwinkel von $12'$ oder $0,2^\circ$

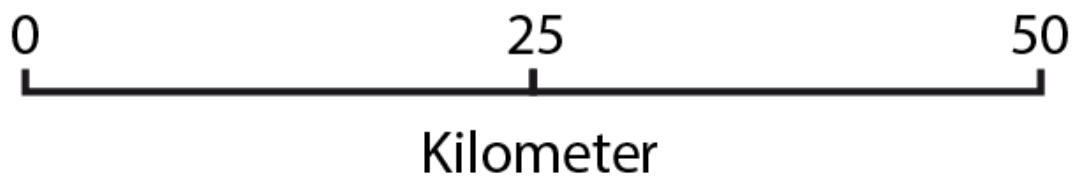
Größen - und Entfernungsmessung mit Geodreieck, Lineal und Bleistift

Ohne Kenntnis der im Internet nachschlagbaren Daten: Wie weit ist "Butendiek" von Westerland entfernt?

Eine maßstäbliche zeichnerische Lösung, ein rechtwinkliges Dreieck mit einer Gegenkathete von 120 m und einem ihr gegenüberliegenden Winkel von $0,2^\circ$ erfordert ein langes Blatt Papier und vielfaches sehr genaues Anlegen des Lineals.

Das Ergebnis würde 35000 m lauten.

Das bestätigt auch die Karte:



Entfernungsmessung mit dem Taschenrechner

Die rechnerische Lösung wäre:

$$\tan \alpha = \text{Gegenkathete} / \text{Ankathete}$$

Bekannt ist $\alpha = 0,2^\circ$ und die Gegenkathete 120m.

Der Tangens von $0,2^\circ$ lautet 0,00349

Durch Umstellen erhalten wir die unbekannte Ankathete:

$$\text{Ankathete} = \text{Gegenkathete} / \tan \alpha$$

$$\text{Ankathete} = 34377 \text{ m.}$$

Eine so genaue Entfernungsbestimmung lässt aber unsere Messung des Sehwinkels nicht zu.

Daher bleiben wir bei gerundeten 35 km.

Entfernungsbestimmung durch Kompasspeilung

In Westerland liegen die Windanlagen in Westnordwestlicher Richtung, auf der Höhe Lister Weststrand in Westsüdwestlicher Richtung.

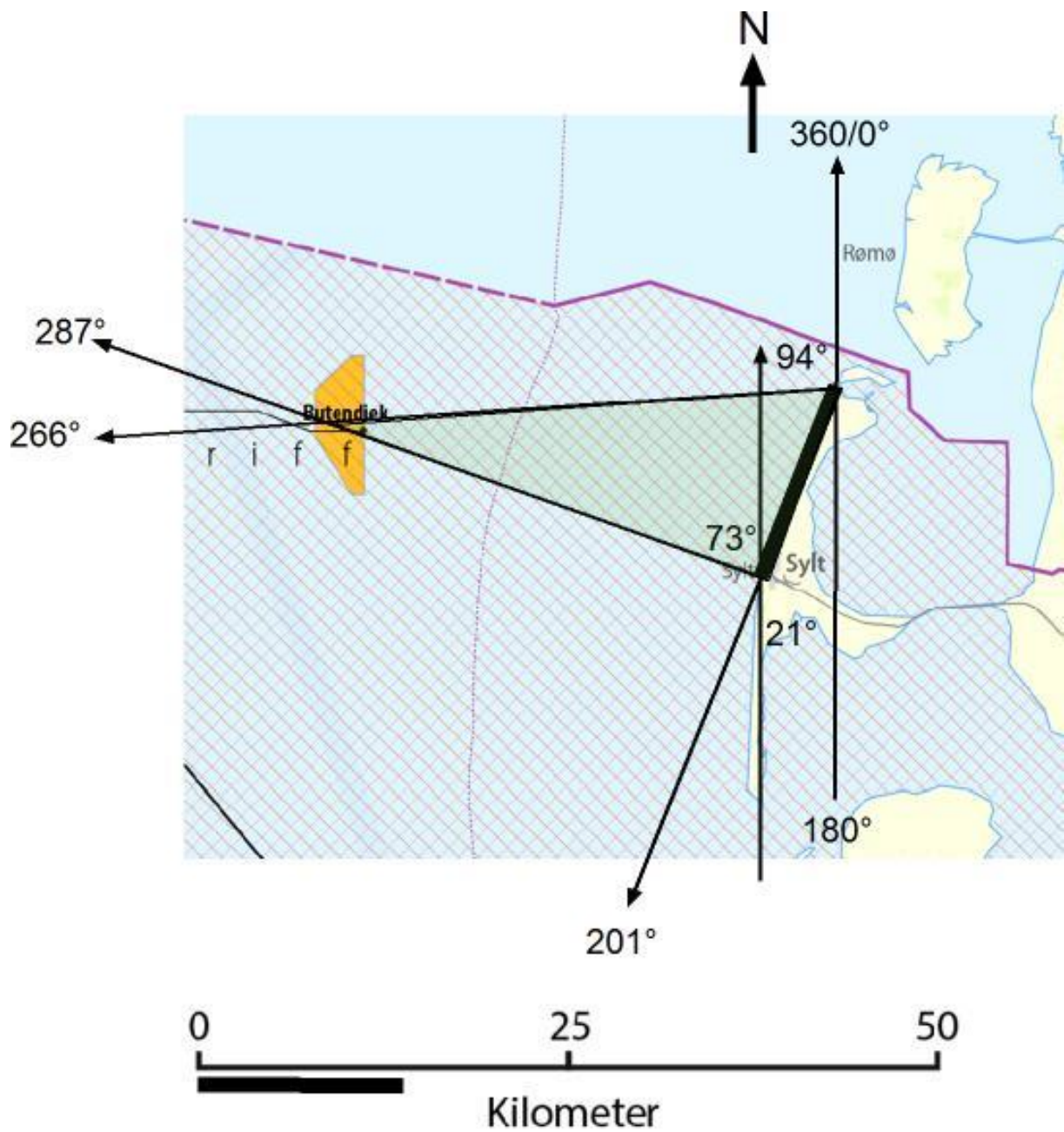
Eine etwas genauere Kompasspeilung ergibt (bezogen auf Nord)

in Westerland 287° , d.h. 73° westlich von Nord

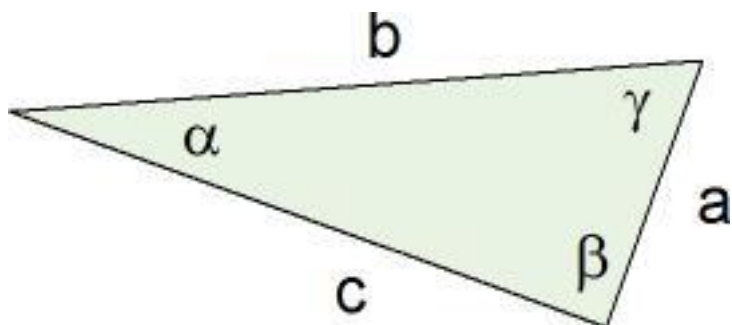
bei List 266° , d.h. 94° westlich von Nord

Die Distanz zwischen Westerland und dem Lister Weststrand beträgt 14 km.

Vom Lister Weststrand aus gesehen, liegt Westerland (Hochhaus) 21° (westlich) zur Südrichtung, also in Kompassrichtung $180 + 21 = 201^\circ$.



Aus diesen Daten lässt sich ein Dreieck konstruieren (grün unterlegt).



$$\text{Winkel } \beta \text{ in Westerland: } \quad 73^\circ + 21^\circ \quad = 94^\circ$$

$$\text{Winkel } \gamma \text{ bei List: } \quad 180^\circ - 94^\circ - 21^\circ = 65^\circ$$

$$\text{Länge der Seite a "Strand" } \quad = 14 \text{ km}$$

Winkelsumme im Dreieck = 180°

$$\text{Winkel } \alpha \text{ bei "Butendiek" } \quad 180 - 94^\circ - 65^\circ \quad = 21^\circ$$

Nach dem Sinussatz gilt:

Das Verhältnis der Seiten des Dreiecks zu den ihnen gegenüberliegenden Winkeln ist gleich.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Daraus folgt für die zwei unbekanntenen Seiten b und c:

$$\frac{14 \text{ km}}{\sin 21^\circ} = \frac{b}{\sin 94^\circ}$$

$$b \text{ (List - Butendiek)} = \frac{14 \text{ km} \cdot \sin 94^\circ}{\sin 21^\circ} = 39,0 \text{ km}$$

$$\frac{14 \text{ km}}{\sin 21^\circ} = \frac{c}{\sin 65^\circ}$$

$$c \text{ (Westerland - Butendiek)} = \frac{14 \text{ km} \cdot \sin 65^\circ}{\sin 21^\circ} = 35,4 \text{ km}$$

Wie groß ist die Erde?

Die durch Kreuzpeilung ermittelten Distanz (Westerland - Butendiek) und der vertikale Sehwinkel könnte dazu dienen, die Höhe der Windanlage zu bestimmen.

Dazu muss aber ein Beobachtungsort gewählt werden der hoch genug ist, die ganze Anlage zu sehen (z.B. die "Himmelsleiter" im Süden Westerlands).

Mit dem Sextanten wurde der der (vertikale) Sehwinkel unter dem die gesamte Anlage erscheint mit $0,25^\circ$ bestimmt.

$$\tan a = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} =$$

Gesucht wird die Gegenkathete, d.h. die Höhe der Windanlage. Durch Umstellung erhält man

$$\text{Gegenkathete} = \tan a * \text{Ankathete}$$

$$\text{Gegenkathete} = \tan 0,25^\circ * 35000m = 152 \text{ m}$$

Der höchste Punkt den die Flügelspitzen erreichen liegt danach bei 152 m.

Aus dem Sehwinkel des Kreises den die Flügelspitzen beschreiben ($0,2^\circ$) lässt sich sein Durchmesser und die Länge der Flügel errechnen:

$$\text{Gegenkathete} = \tan 0,20^\circ * 35000m = 120 \text{ m}$$

Flügelänge 60 m.

Die oben gezeigten Bilder wurden von der Westerländer Strandpromenade gemacht, also einige Meter über dem Meeresniveau. Unten an der Wasserkante tauchen die "Windmühlen" erheblich so tief "ins Meer", dass ihre 90 m Naben etwas unter der Horizontebene liegen.

Gehen wir davon aus, dass damit die untersten 95 m der 35000 m entfernten Anlagen unter der Horizontlinie liegen. Wie groß wäre der "Sehwinkel" unter dem dieser durch die Erdkrümmung verborgene Teil erscheinen würde?

Mit der Formel $\tan \alpha = \text{Gegenkathete}/\text{Ankathete}$ lässt sich das leicht berechnen:

$$\tan \alpha = 95/35000 = 0,00271$$

Der dazugehörige Winkel ist 0,1556

Dieser Winkel ist der "Sehnentangentenwinkel".

Der Erdumfang berechnet sich nach der Formel:

$$U_{\text{Erde}} = 360^\circ / \tau / 2 * d$$

mit τ (Sehnentangentenwinkel), d = Distanz

$$U_{\text{Erde}} = 360^\circ / 0,1556^\circ / 2 * 35000 = 40501446 \text{ m}$$

Das kommt dem tatsächlichen Erdumfang von ≈ 40000 km schon recht nahe...

Wer es genauer nehmen möchte müsste sich am Strand flach hinlegen, denn die Augenhöhe des stehenden Beobachters geht in die Rechnung nicht ein. Dann müsste das Meer, was selten der Fall ist, aber spiegelglatt sein.

In Horizontnähe führen Schwankungen der Luftdichte zu Verzerrungen. Manchmal werden Objekte optisch über den Horizont "gehoben" die in mathematisch gerader Sehlinie unter dem Horizont liegen würden.

Da die Größe der Erde aber auf jedem Smartphone nachschlagbar ist, sollen diese "Messfehler" hier ignoriert werden.

Wissenschaftspädagogisch sehr zu begrüßen wäre aber die "Methodenkritik" und die Frage, warum die gemessenen und errechneten Werte nicht 100% mit den "amtlichen" Werten übereinstimmen.

Das beim Heruntergehen zum Strand beobachtete "Eintauchen" der Windanlagen lässt den Schluss zu, dass die Erde wirklich eine Kugel und keine Scheibe ist.

Mit dem gefundenen Umfang der Erde kann man natürlich auch die Größe der Erde bestimmen.

Wer die dazu notwendige Kreiszahl π (pi) am Strand selbst finden will nimmt (statt des Smartphones) einen Ball, eine Creme- oder Coladose und einen Schnürsenkel. Damit lässt sich das stets gleiche Verhältnis von Umfang zu Durchmesser eines Kreises oder einer Kugel schon recht gut bestimmen.

Wie immer auch Ihr Ergebnis für π ausfällt: Die Formel ist $U = d \cdot \pi$

Mit $\pi = 3$ (Im "Standkorb" mit Hilfe eines Balls ermittelt) wäre der Erddurchmesser

$$d = U/3 = 40501446/3 = 13500482 \text{ m.}$$

Tatsächlich - und genauere Messung bestätigt das - ist $\pi = 3,14$ und die Erde etwas kleiner.

Ingo Mennerich

Schulbiologiezentrum Hannover

Sylt/Hannover Mai 2015