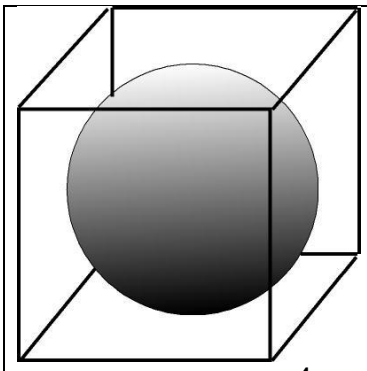
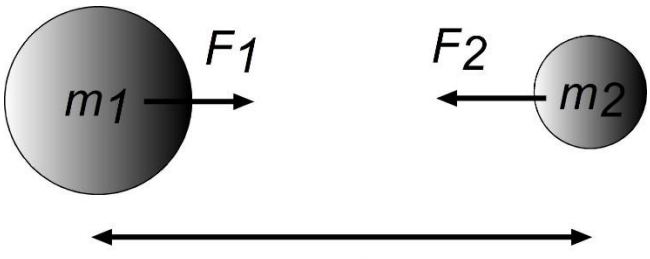
Landeshauptstadt Hannover

Hannover

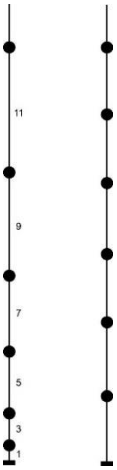
Schulbiologiezentrum



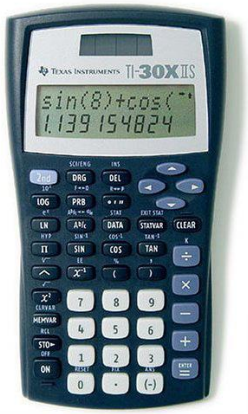
$$V = \frac{4}{3}\pi * r^3$$



$$F_1 = F_2 = G\frac{m_1 * m_2}{r^2}$$



$$s = \frac{a*t^2}{2}$$



19.82

Wir „wiegen“ die Erde

Anregungen für ein
mathematisch-physikalisches Unterrichtsprojekt

Oktober 2015

Herausgeber: Landeshauptstadt Hannover
Schulbiologiezentrum Hannover

Titel: Wir "wiegen" die Erde
Anregungen für ein mathematisch-physikalisches Unterrichtsprojekt

Titelbild: Ingo Mennerich

Arbeitshilfe 19.82

Verfasser: Ingo Mennerich

Herausgeber: Landeshauptstadt Hannover
Fachbereich Bibliothek und Schule
Schulbiologiezentrum
Vinnhorster Weg 2
30419 Hannover
Tel: 0511/168-47665
Fax: 0511/168-47352
E-Mail: schulbiologiezentrum@hannover-stadt.de
Internet: www.schulbiologiezentrum.info

Inhalt

Einige Sätze vorweg: 4

Im Takt fallende Murmeln 5

In Schwung kommen: Von Null auf Hundert in drei Sekunden 6

Freier Fall / Freier Fall mit EXCEL 7

Freier Fall zum Ausprobieren: Die Fallschnur 9

Messung der Erdbeschleunigung mit PE-Rohr, Golfball, Stoppuhr und Taschenrechner 11

Lineal als Reaktionszeitmesser 14

Messung der Erdbeschleunigung mit einem Pendel 15

Freier Fall in Zeitlupe: Die „Fallmaschine“ 17

Wie schwer ist die Erde? Kugelvolumen und Dichte 22

Was wäre, wenn die Erde nur aus Granit bestünde? 24

Ermittlung der Gravitationskonstanten „*G*“ 25

"Anziehungskraft" 26

Messen der „Anziehungskraft“: Die Gravitationsdrehwaage 27

Erdmasse aus Fallbeschleunigung und Gravitationskonstanten errechnen 29

ANHANG:

Formeln 32

Herleitung des Newton´schen Gesetzes 34

Einige Worte vorweg

Was wiegt die Erde? Was für eine Frage! Wozu sollte man das wissen? Und wen sollte das interessieren?
Um gleich eingangs ein Missverständnis auszuräumen: Würde man die Erde auf eine riesige Waage legen würde sie nichts (!) wiegen, egal ob der Südpol, der Nordpol oder ein anderer beliebiger Ort „unten“ liegt. Auf welche Unterlage sollte man die Waage stellen? An welchem "Aufhänger" könnte man die Erde hängend wiegen?
Was, die Erde hat kein Gewicht? Wenn man einen Teil der Erde, also beispielsweise einen Stein oder eine Handvoll Sand voll auf die Waage legt, zeigt sie doch ein Gewicht an!
Warum sollte dann die ganze Erde, also die Summe dieser Teile kein Gewicht haben?

Die Erde hat, im Gegensatz zu ihren Bestandteilen, kein Gewicht, sie ist schwerelos. Der Grund dafür ist verblüffend einfach: Sonst würde sie nach „unten“ ins All fallen!
Ein Stein (oder jedes andere Objekt) bringt in Europa und in Australien das gleiche Gewicht auf die Waage. Nur dass er einmal nach „unten“ und einmal nach „oben“ auf die Waagschale drückt.
„Oben“ ist in „down-under“ (Australien) eben das, was für uns „unten“ ist und die Frage sei erlaubt, wer definiert, was „oben“ und was „unten“ ist auf dieser Erde.
Die Frage also nicht heißen, „was wiegt die Erde?“ sondern „welche Masse hat die Erde?“. Denn auch „schwerelos“ im All hat sie eine Masse. So wie der 80kg „schwere“ Astronaut, der vor und nach seiner Reise in die Schwerelosigkeit seine 80kg auf die Waage bringt und der diese Masse auch in der Schwerelosigkeit nicht verliert.
Welche Masse also hat die Erde?
Notfalls kann man das ja nachschlagen, WIKIPEDIA hält sicher eine Antwort darauf bereit.
Und so erfährt man, dass die Masse der Erde unvorstellbare $5{,}974*10^{24}$kg oder fast 6 Trilliarden Tonnen beträgt. So weit, so gut.
Wer diese Zahl jetzt schnell ins Reich des überflüssigen Wissens verbannen möchte wird gebeten, mal seinen „Navi“ zu fragen wie der den Weg durch die Stadt findet.
Was hat das „Gewicht“ der Erde mit dem Navi zu tun?
Nun, der Navi verrechnet die Laufzeiten der Signale mehrerer im All geparkter Satelliten und bestimmt dadurch den eigenen, auf wenige Meter exakten Standort.
Die Positionen der Satelliten sind genau festgelegt und müssen innerhalb sehr eng gezogener Grenzen stabil bleiben.

Ohne die Kenntnis der exakten Masse der Erde wäre es nicht möglich, einen Satelliten ins All zu schicken und dort „geparkt“ zu halten.
Das geht schon beim Start los. Die Rakete, die den Satelliten auf seine vorausberechnete Bahn bringen soll, braucht eine bestimmte Startgeschwindigkeit um nicht vor der Zeit wieder zur Erde zurückzufallen.
Je massereicher der Planet von dem aus sie startet, desto größer muss ihre Geschwindigkeit sein.
Auf dem in Bezug auf die Erde massearmen Mond kann man größere „Hopser“ machen als auf der Erde und eine Geschwindigkeit einer Sonde, die einen Kleinplaneten besuchen soll, muss so ausgelegt sein, dass sie beim Aufsetzen nicht gleich wieder zurückspringt ins All.
Das und vieles anders kann exakt vorausberechnet werden und wird mit Sicherheit in der Praxis bestätigt werden.
Die Masse der Erde ist eine zentrale Größe. Ihre Kenntnis macht nicht nur Fernsehen möglich sondern bestimmt indirekt auch die Statik von Gebäuden. Auf dem Mars könnte man erheblich „leichter“ bauen.
Nur wie hat man die Masse gemessen? Nicht mit einer Waage!

Die Kenntnis der Größe der Erde, also der Durchmesser oder Radius einer riesigen Kugel ermöglicht uns, ihr Volumen zu bestimmen. Kennen wir die durchschnittlichen „Gewichte“ möglichst vieler verschiedener ihrer Teile können wir ihre Dichte bestimmen.
Aus dem Volumen und der Dichte können wir die Masse errechnen.
Eine andere Methode der Masse-Bestimmung ist die Messung der Beschleunigung von fallenden Objekten. Die Fallbeschleunigung kann man aus der Wegstrecke und Falldauer berechnen.
Im Folgenden wollen wir Möglichkeiten und Grenzen einiger einfacher Methoden zeigen, diese zu messen.
Hat man auf diese Weise die Masse errechnet kann man sogar die Gravitationskonstante ermitteln, diesen überall gültigen Multiplikator aller Berechnungen rund um die Schwerkraft.
Natürlich wird es uns nicht gelingen, diese Werte so genau zu messen, dass wir die exakten, heute anerkannten Ergebnisse erzielen.
Darum geht es aber gar nicht. Viel wichtiger ist, dass wir begreifen lernen, wie schwer es ist, eigene experimentelle Wege zu gehen und dabei auftretende Fehler und Wiedersprüche in den Griff zu bekommen. Wie schwer es ist, genau zu messen und welcher großen Anstrengungen und Leistungen es bedurfte, bis wir soweit waren wie wir heute sind.
Vor kurzem zeigte die NASA Bilder, die beim Vorbeiflug am Pluto entstanden. Der ist rund 15000mal so weit entfernt wie unser Mond. Fast alle Menschen haben ihn, zu klein, zu weit entfernt selbst für starke Teleskope, nie mit eigenen Augen gesehen. Das nährt das Staunen über den menschlichen Intellekt der es möglich macht eine Kamera dorthin zu steuern. Und die Achtung vor allen denjenigen, auf deren Schultern diese heutigen Fähigkeiten ruhen.

Das Ziel ist bekannt, alle Werte wie Fallbeschleunigung, Masse der Erde und Gravitationskonstante stehen allen über vielerlei gutzugänglicher Medien jederzeit zur Verfügung. Hier geht nicht um das Ziel und nicht um Antworten, sondern um die Fragen und den Weg der zu dem heutigen Wissen führt.

Im Takt fallende Murmeln

Wir nehmen zu zweit je zwei Murmeln in die Hand. Aus welcher Höhe müssen sie fallen, damit sie in gleichen Zeitabständen zu Boden fallen?
Hier sei schon einmal ein paar unter den vielen anderen möglichen Lösungen verraten:

8, 24, 72 und 128 cm
1,4,9 und 16 cm
3, 12, 27 und 48 cm
7, 28, 63 und 112 cm

Welches Geheimnis verbirgt sich hinter diesen „magischen“ Zahlen die zu einem so harmonischen „Klangerlebnis“ führen?

In Schwung kommen: Von Null auf Hundert in drei Sekunden

Sebastian Veddel (oder einer seiner Kollegen) beschleunigt von Null auf Hundert in drei Sekunden.

100 km/h sind $\frac{100000m}{3600s} = 27{,}8m/s$

Bei gleichmäßiger Beschleunigung:
Nach 1 Sekunde 9,26 m/s schnell (33,3 km/h)
Nach 2 Sekunden 2*9,26 m/s = 18,52 m/s schnell (66,6 km/h)
Nach 3 Sekunden 3*9,26 m/s = 27,78 m/s schnell (99,9 km/h)

Wie groß ist die jeweils nach einer Sekunde zurückgelegte Strecke?
In der ersten Sekunde wird von 0 m/s auf 9,26 m/s beschleunigt und die Hälfte von 9,26 m zurückgelegt, also 4,63 m.
In der zweiten Sekunde wird bei einer Anfangsgeschwindigkeit von 9,26 m/s um weitere 9,26 m/s auf 18,52 m/s beschleunigt und damit 9,26 m plus 4,63 m, also 13,89 m zurückgelegt.
In der dritten Sekunde wird bei einer Anfangsgeschwindigkeit von 18,52 m/s um weitere 9,26 m/s auf 27,78 m/s beschleunigt und damit 18,52 m plus 4,63 m, also 23,15 m zurückgelegt.

Die in drei Sekunden zurückgelegte Wegstrecke ist 4,63 m + 13,89 m + 23,15 m = 41,67 m.

Die Beziehung Beschleunigung-Weg-Zeit kann man so zusammenfassen:
$s = \frac{a*t^2}{2}$ mit s (Strecke, m), a (Beschleunigung, m/s^2) und t (Zeit, s)

Nach 1 Sekunde $\rightarrow s = \frac{9{,}26m/s*1s^2}{2} = 4{,}63m$
Nach 2 Sekunden $\rightarrow s = \frac{9{,}26m/s*2s^2}{2} = 18{,}52m$
Nach 3 Sekunden $\rightarrow s = \frac{9{,}26m/s*3s^2}{2} = 41{,}67m$

Achtung: m/s bezieht sich auf die Geschwindigkeit und heißt Meter pro Sekunde.
m/s^2 meint die Beschleunigung, also die Änderungsrate der Geschwindigkeit pro Zeit und heißt „Meter pro Sekunde“ pro Sekunde

Machen wir die Probe und lösen nach a (Beschleunigung) auf:
Durch Umstellen der Formel $s = \frac{a*t^2}{2}$ erhalten wir $a = \frac{2s}{t^2}$

$$a = \frac{2*41{,}67m}{3^2} = 9{,}26 \text{ m/s}^2.$$

Ein Konkurrent Veddels hat nach 3 Sekunden bereits 45 m zurückgelegt.
Wie stark hat er beschleunigt?

$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2*45m}{3^2} = 10 \text{ m/s}^2.$$

Welche Geschwindigkeit haben die beiden nach 3 Sekunden erreicht?

Die Geschwindigkeit steigt linear an und ist das Produkt aus Beschleunigung a und Zeit t

$$v = a * t$$

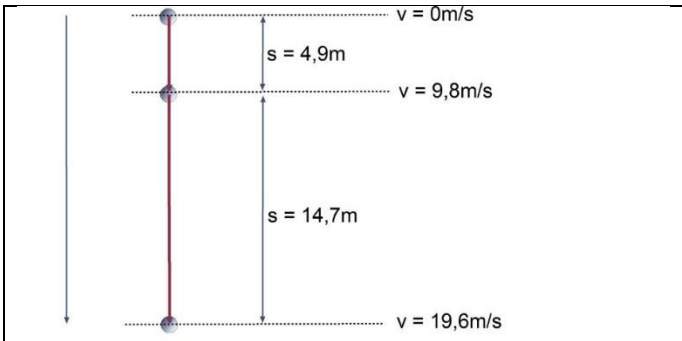
Daraus ergeben sich für Veddel $v = 9{,}26\ m/s^2 * 3s$ = 27,78 m/s (100 km/h) und für seinen Konkurrenten $v = 10\ m/s^2 * 3s$ = 30 m/s. Wer in einer Sekunde 30 m hinter sich lässt, schafft in einer Stunde das 3600fache, also 108000m oder 108 km/h. Er fährt nach 3 Sekunden also 8 km/h schneller als Veddel.

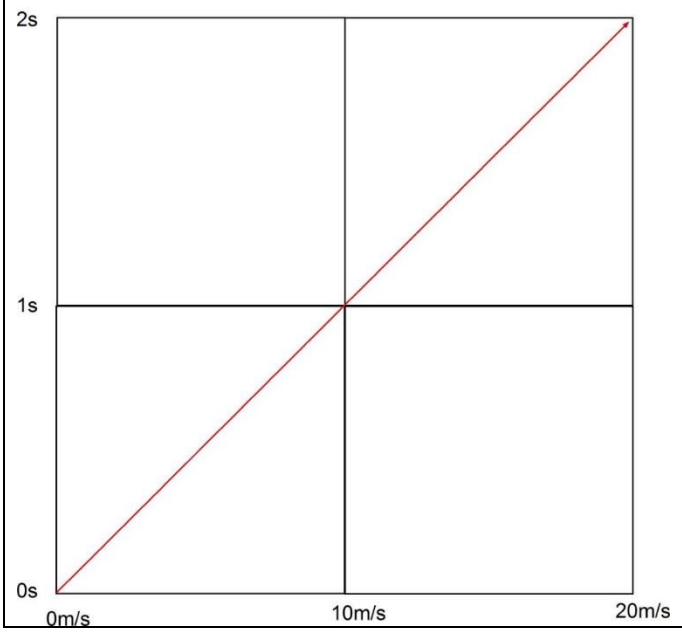
Freier Fall

Ein Ball der aus etwa 5 m Höhe fallen gelassen wird stürzt nach etwa 1 Sekunde auf den Erdboden. Ein Ball der aus etwa 20 m Höhe fällt braucht dazu nicht 4 x 1s = 4s sondern nur 2 Sekunden.
Denn: Beim Fall wird der Ball beschleunigt und zwar um etwa 10 Meter pro Sekunde).
Nach einer Sekunde ist der Ball fast 10 m/s schnell. Da er zu Beginn die Geschwindigkeit 0 m/s hatte beträgt die gefallene Strecke ½ x 10m = 5m.
In der zweiten Sekunde wird er um weitere 10 m/s beschleunigt und ist am Ende der zweiten Sekunde 20 m/s schnell. die Anfangsgeschwindigkeit des Balles zu Beginn der zweiten Sekunde beträgt 10 m/s. In der zweiten Sekunde erfährt der Ball eine weitere Beschleunigung um 10 m/s woraus ein Streckenzuwachs von 5 m folgt. Die in der zweiten Sekunde gefallene Strecke beträgt also 10m + 5m = 15 m und die gesamte Fallstrecke nach 2 Sekunden ist 20m.
Die Anfangsgeschwindigkeit zu Beginn der dritten Sekunde ist 20 m/s und wird bei konstanter Beschleunigung um weitere 10 Meter pro Sekunde an ihrem Ende 30 m/s erreicht haben.

Zeit	1s	2s	3s	4s	5s	6s
Anfangs-Geschwindigkeit	0 m/s	10 m/s	20 m/s	30 m/s	40 m/s	50 m/s
End-Geschwindigkeit	10 m/s	20 m/s	30 m/s	40 m/s	50 m/s	60 m/s
Geschwindigkeitsänderung	10 m/s	10 m/s	10 m/s	10 m/s	10 m/s	10 m/s
Fallstrecke pro Sekunde	5 m	15 m	25 m	35 m	45 m	55 m
Gesamte Fallstrecke	5 m	20 m	45 m	80 m	125 m	180 m

Die oben genannte Beschleunigung von 10m/s^2 ist eine didaktische Vereinfachung zum leichteren Einstieg. Der genaue Wert der Fallbeschleunigung ist 9,81… m/s^2 mit dadurch etwas modifizierten Ergebnissen:





Eine fallende Masse wird mit 9,8 m/s^2 beschleunigt. Innerhalb einer Sekunde erreicht sie aus Ruhelage (0 m/s) eine Geschwindigkeit von 9,8 m/s.

Da die Beschleunigung gleichmäßig erfolgt ist die innerhalb der ersten Sekunde zurückgelegte Wegstrecke 4,9 m.

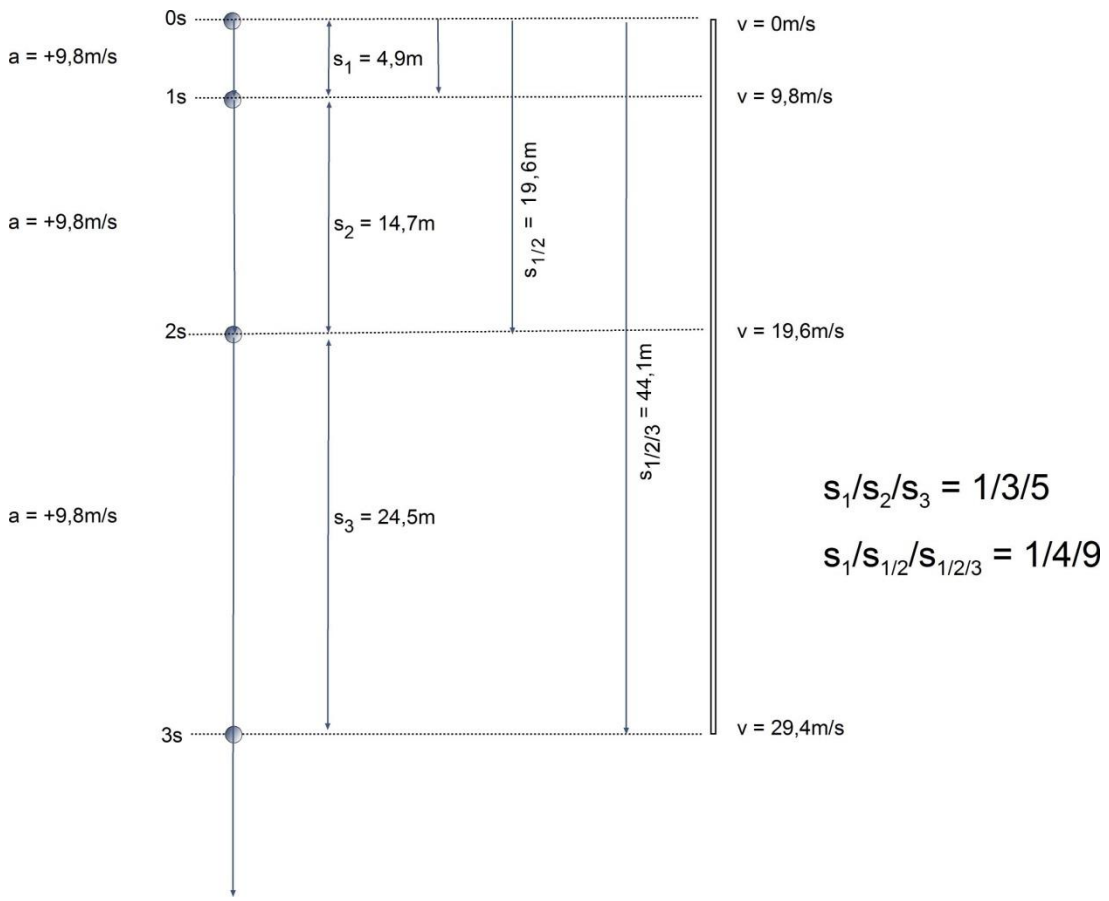
In der zweiten Sekunde wird die 9,8 m/s schnelle Masse um weitere 9,8 m/s^2 beschleunigt und erreicht 19,6 m/s.

Der in der ersten Sekunde gefallene Weg ist 4,9 m lang (0 m + 4,9 m).

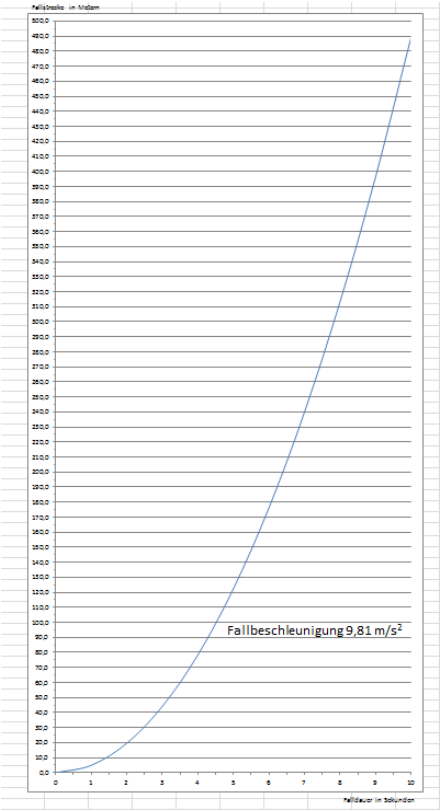
Der in der zweiten Sekunde gefallene Weg ist 14,7 m lang (9,8 m + 4,9 m).

Die insgesamt zurückgelegte Wegstrecke beträgt 19,6 m (4,9 m + 14,7 m).

Die in jeder Sekunde zurückgelegten Teilstrecken verhalten sich wie 1 : 3 : 5 usw.
Die mit jeder Sekunde wachsenden Gesamtwege verhalten sich wie die Quadrate der verstrichenen Zeit: 1 : 4 : 9 usw.



Freier Fall mit EXCEL:



Der Zusammenhang zwischen Fallbeschleunigung, Falldauer und Fallstrecke lässt sich z.B. mit Excel untersuchen.

Hier kann auch mit unterschiedlichen Fallbeschleunigungen "experimentiert" werden

Fallstrecke = Fallbeschleunigung*Zeit^2*0,5

Fallstrecke = 9,81*Sekunden^2*0,5

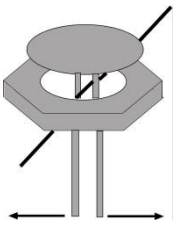
Hier bleibt der Luftwiderstand unberücksichtigt der mit dem Quadrat der Geschwindigkeit zunimmt.

In Abhängigkeit von der Form des fallenden Objekts geht die auf den Körper wirkende Erdbeschleunigung von anfänglichen 9,81m/s^2 auf null zurück so dass nach Erreichen der Fallgrenzgeschwindigkeit keine weitere Beschleunigung mehr auftritt.

Bei Fallschirmsprung ist das etwa nach 7 Sekunden der Fall und die Geschwindigkeit beträgt dann etwa 200 km/h.

Freier Fall zum Ausprobieren: Die Fallschnur

An einen 2 m langen Faden werden – zunächst in gleichmäßigen Abständen 6 mit Musterbeutelklammern fixierte Muttern verteilt.



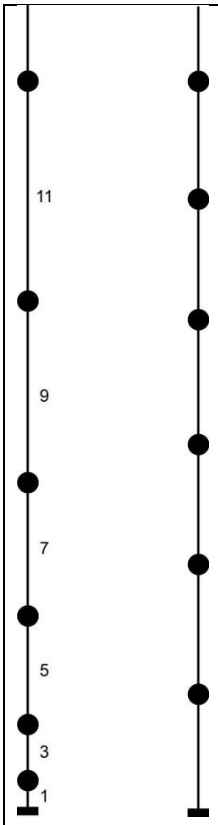
Dazu wird der Faden zwischen die "Beine" der Klammer geschoben, die Klammer durch die Mutter gesteckt und die gespreizten "Beine" um die Mutter herumgebogen.

Auf diese Weise bleiben die Muttern beim Fall am gewünschten Platz und lassen sich, falls erforderlich, leicht wieder lösen und verschieben.

Der Faden wird senkrecht hängend über ein Backblech gehalten und losgelassen.
Beim Fall schlagen die Muttern nacheinander auf das Blech.
In welchem Takt geschieht das? Sind die Abstände gleich, werden sie größer oder kleiner?

Wie müssen die Muttern auf dem Faden verteilt werden damit sie in gleichmäßigen Zeitabständen auf den Boden aufschlagen?

Im Experiment werden folgende Abstände gefunden:



1	2	3	4	5	6
5 cm	20 cm	45 cm	80cm	125cm	180cm

In welchem Verhältnis stehen diese Zahlen zueinander?

Alle Zahlen sind durch 5 teilbar.
Alle Abstände sind Vielfache des ersten Abstands.
20 ist 4x5, 45 ist 9x5, 80 ist 16x5, 125 ist 25x5
und 180 ist gleich 36x5.

Bezogen auf die erste Mutter verhalten sich die weiteren Abstände wie 1:4:9:16:25:36.

Das Abstandsverhältnis untereinander ist 1:3:5:7:9:11.

Wenn die erste Mutter in 5 cm Höhe hängt, muss die zweite viermal so hoch sein, die dritte neunmal, die vierte 16mal so hoch und so weiter.

Wären alle Muttern in gleichem Abstand angeordnet,
(180 cm : 6 = 30 cm) würden sie in immer schnellerer Abfolge auf den Boden aufschlagen.

Mit $g = \frac{2s}{t^2}$ ergeben sich beispielsweise folgende Ergebnisse:

5 cm	20 cm	45 cm	80cm	125cm	180cm
0,1s	0,2s	0,3s	0,4s	0,5s	0,6s
$\frac{2 * 0{,}05m}{0{,}1s^2}$	$\frac{2 * 0{,}2m}{0{,}2s^2}$	$\frac{2 * 0{,}45m}{0{,}3s^2}$	$\frac{2 * 0{,}8m}{0{,}4s^2}$	$\frac{2 * 1{,}25m}{0{,}5s^2}$	$\frac{2 * 1{,}8m}{0{,}6s^2}$

Das Ergebnis *g* ist stets 10m/s^2.

Beispiele für mögliche Abstandsverhältnisse bei einer Fallschnur von 200 cm Länge in cm.
(Länge des ersten Abschnitts zwischen 1 und 10 cm)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
16	32	48	64	80	96	112	128	144	160
25	50	75	100	125	150	175	200		
36	72	108	144	180					
49	98	149	196						
64	128	192							
81	162								
100	200								
121									
144									
169									
196									

Aus diesen Überlegungen folgt:
Fällt ein Ball in 1 Sekunde 5 m tief, wird er in 2 Sekunden den vierfachen Weg, also 20 m tief fallen, in 3 Sekunden den neunfachen Weg, 45 m usw.

5 m	20 m	45 m	80 m	125 m	180 m
1s	2s	3s	4s	5s	6s
$\frac{2*5m}{1s^2}$ = 10m/s^2	$\frac{2*20m}{2s^2}$= 10m/s^2	$\frac{2*45m}{3s^2}$= 10m/s^2	$\frac{2*80m}{4s^2}$= 10m/s^2	$\frac{2*125m}{5s^2}$=10m/s^2	$\frac{2*180m}{6s^2}$=10m/s^2

Die Beschleunigung *g* wäre danach 10 m/s^2.

Messung der Erdbeschleunigung mit PE-Rohr, Golfball, Stoppuhr und Taschenrechner

Ziel ist es, die Zeitspanne zwischen dem Loslassen und dem Aufschlagen des Golfballs so genau wie möglich zu messen. Das gelingt nach einigen Probedurchgängen recht gut wenn man die Stoppuhr in der einen Hand hält und bedient, mit der anderen Hand das Rohr und mit einem Finger den Golfball festhält. Beim Loslassen drückt man (zugleich!) auf die Starttaste der Uhr und kurz (!) danach beim Aufschlagen des Balles auf dem Boden noch einmal.

Welche Zeitspannen dürfen wir erwarten?
Entscheidend ist die Länge des Rohres, je länger desto mehr Zeit vergeht zwischen Loslassen und Aufschlagen. Da der fallende Ball jedoch beschleunigt wird ist der Zusammenhang zwischen Fallstrecke und Zeit nicht linear:

Der Zusammenhang zwischen Fallstrecke *s*, Beschleunigung *a* und Zeitspanne *t* wird durch diese Formel ausgedrückt:

$$s = \frac{a * t^2}{2}$$

Umgeformt nach *a*:

$$a = \frac{2s}{t^2}$$

Umgeformt nach *t*:

$$t^2 = \frac{2s}{a} \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

Mit einem 2 m langen, vertikal aufgestellten Rohr und der bekannten Erdbeschleunigung von 9,81 m/s^2 würden wir im Idealfall erhalten:

$$t = \sqrt{\frac{2*2\mathrm{m}}{9{,}81\mathrm{m/s^2}}} = 0{,}639\mathrm{s}$$

Die Falldauer lässt sich erhöhen, wenn man den Golfball durch das schräg gehaltene Rohr herunterrollen lässt. Je flacher das Rohr gehalten wird, desto länger braucht der Ball bis zum Aufschlag am Boden. Auch wird seine Endgeschwindigkeit mit abnehmendem Winkel zunehmend kleiner. Das heißt, auch die Beschleunigung des Balles nimmt ab. Es gibt relativ einfache mathematische Zusammenhänge zwischen dem Fallwinkel, der Beschleunigung, der Zeitspanne und der Geschwindigkeit.
Versuche zur Bestimmung der Fallbeschleunigung hat schon Galileo Galilei durchgeführt, möglicherweise (obwohl historisch nicht verbürgt) am Schiefen Turm von Pisa.

Kenne ich die Falldauer entlang einer Strecke *s* kann ich die Beschleunigung *a* ermitteln:

$$a = \frac{2s}{t^2}$$

$$a = \frac{2 * 2m}{0{,}639s^2} = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$$

Die Erdbeschleunigung nennen wir im Folgenden nicht *a* sondern *g* (von „Gravitation“).

$$g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$$

Die „Schiefe Ebene“, der Boden unter der schiefen Ebene und die Senkrechte unter der Startposition des Balles bilden ein rechtwinkliges Dreieck.
Ein rechtwinkliges Dreieck setzt sich zusammen aus einer Ankathete, einer Gegenkathete und einer Hypotenuse.

Rechtwinklige Dreiecke kann man nach dem Gesetz des Pythagoras und mit einfachen Sinus-, Cosinus-, Tangens- und Cotangens-Funktionen berechnen.

In unserem Fall wird nur der Sinus gebraucht:

Der Sinus ist das Längen-Verhältnis zwischen der Gegenkathete und der Hypotenuse.

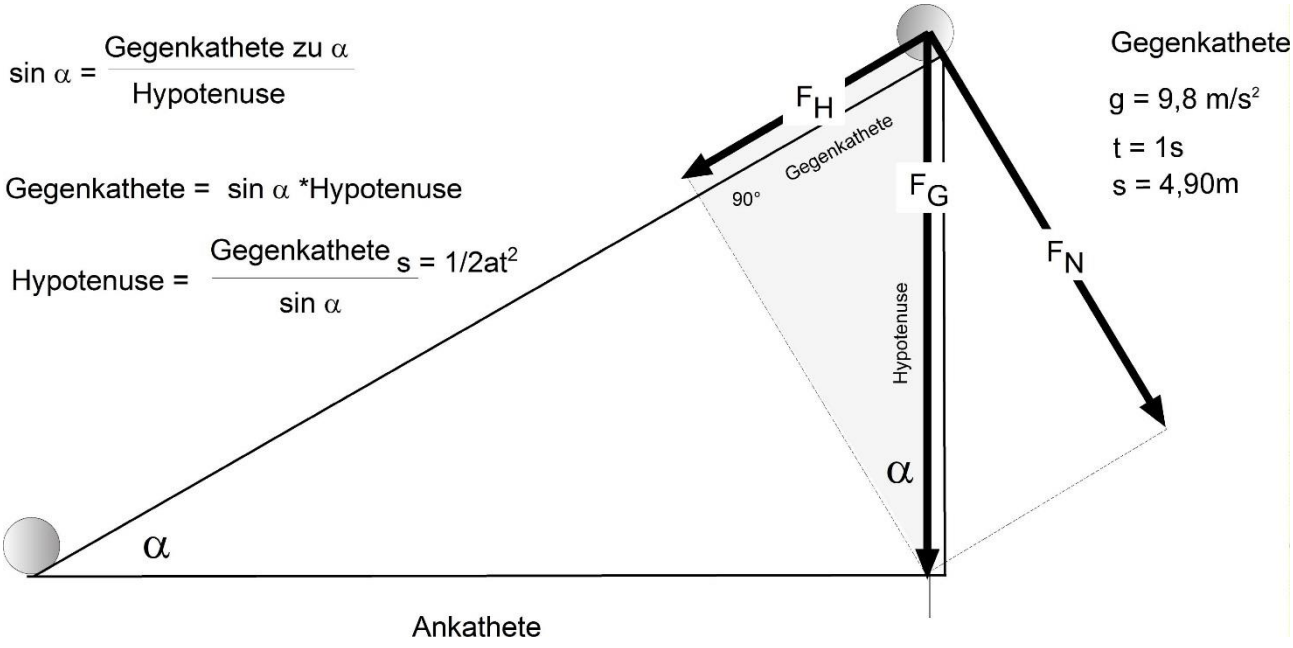
$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Das heißt:
Die schiefe Ebene bildet die Hypotenuse. Die Senkrechte unter dem in der Ausgangsposition liegenden Ball ist die Gegenkathete. Die schiefe Ebene, d.h. die Hypotenuse liegt einem Winkel α zum Boden. Kenne ich die Falldauer des Balls entlang der Hypotenuse z.B. bei Winkel von α = 30° kann ich die Beschleunigung berechnen:

$$a = g*\sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{1\text{m}}{2\text{m}} = 0{,}5$$

$$a = g*0{,}5 = 4{,}9\ \text{m/s}^2$$



Der umgekehrte Weg führt von der gemessenen Laufzeit des Balls auf der schiefen Ebene zur Beschleunigung:

Bekannt:
t = 0,9035s (idealisierter Wert!)
s = 2 m

Gesucht:
Beschleunigung *a*

$$a = \frac{2s}{t^2}$$

$$a = \frac{2 * 2\mathrm{m}}{0{,}9035\mathrm{s}^2}$$

$$a = 4{,}9\ \mathrm{m/s}^2$$

Daraus lässt sich die Erdbeschleunigung *g* ableiten:

$$g = \frac{a}{\sin\alpha}$$

$$g = \frac{4{,}9\mathrm{m/s}^2}{\sin 30°}$$

$$g = 9{,}8\ \mathrm{m/s}^2$$

Die die hier in die Formeln gesetzte Falldauer ist natürlich idealisiert. Unsere Methode wird davon u.U. weit abweichende Werte liefern.
Der Rückgriff auf Idealwerte dient dem Zweck, die rechnerischen Zusammenhänge klarer zu machen. Außerdem lässt sich damit überprüfen, wie weit man mit einfachen Methoden an die wissenschaftlich ermittelten Werte herankommt.
Das ermöglicht eine Fehlerdiskussion: Woran scheitert die Abweichung von den "Idealwerten"?

Lineal als Reaktionszeitmesser

Um abschätzen zu können, wie stark das Ergebnis durch das verzögerte Reagieren auf den Aufschlag verfälscht wird bietet sich an, die individuelle Reaktionszeit zu testen.

Dazu dient ein einfaches, 30 cm langes Lineal das der Tester an der oberen Kante nahe der Null festhält. Der zu testende hält – ohne das Lineal zu berühren - Daumen und Zeigefinger in Höhe der Null.
Lässt der Tester das Lineal los soll der zu testende zugreifen.
Je früher er reagiert, desto kürzer ist der Weg des fallenden Lineals.

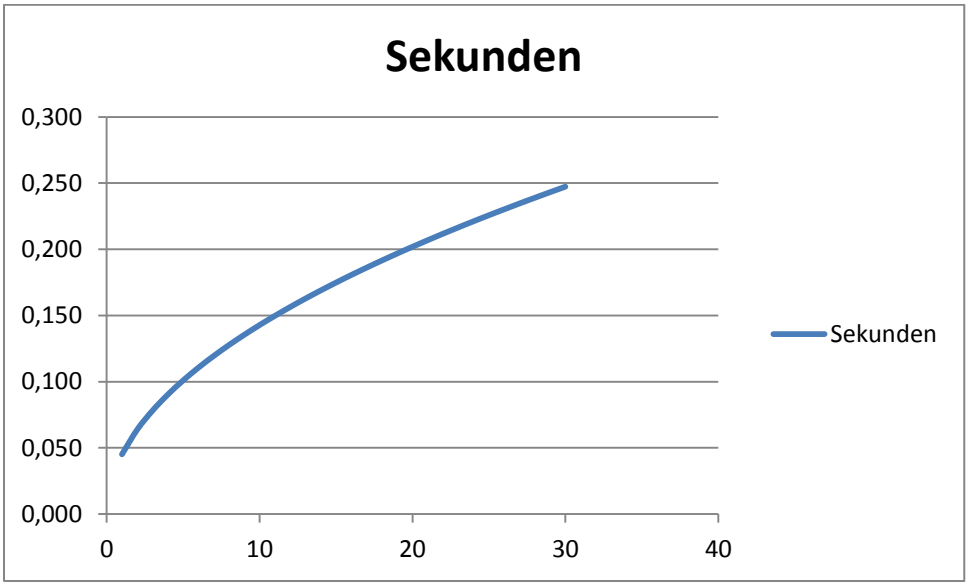
Reaktionszeit und Wegstrecke lassen sich mit der Formel berechnen:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

Dabei ist zu beachten, dass die Strecke *s* in Metern einzufügen ist (1 cm = 0,01 m)
Wegstrecke des fallenden Lineals und Reaktionszeit

cm	Sekunden*		cm	Sekunden*		cm	Sekunden*
0	0,000		11	0,150		21	0,207
1	0,045		12	0,156		22	0,212
2	0,064		13	0,163		23	0,217
3	0,078		14	0,169		24	0,221
4	0,090		15	0,175		25	0,226
5	0,101		16	0,181		26	0,230
6	0,111		17	0,186		27	0,235
7	0,119		18	0,192		28	0,239
8	0,128		19	0,197		29	0,243
9	0,135		20	0,202		30	0,247
10	0,143						

Excel: WURZEL(2*A1*0,01/9,81)



Messung der Erdbeschleunigung mit einem Pendel

Ein Pendel ermöglicht eine verlangsamte, sich in kleinen Portionen vollziehende Form des Falls.

Galileo Galilei soll angesichts einer in der Kathedrale von Pisa an einem Seil hängenden Lampe auf die Idee gekommen sein, dass der Rhythmus ihres Hin- und Herpendelns nicht von der Weite der Schwingung sondern allein von der Länge des Seils abhängt.

Sakralbauten eignen sich ganz offensichtlich gut zum Entdecken von Naturphänomenen.
Der Rhythmus der Kirchturmuhren und später vieler Stand- und Wanduhren wurde lange Zeit von Pendeln gesteuert. Dass das "Tick Tack" der Uhr genau im Sekundentakt zu hören war, lag nur an der Länge des Pendels.
Die Eigenschaften eines Pendels kann man auch zu Hause untersuchen. Ein langer Faden, verschiedene daran geknotete Gewichte, ein Metermaß und eine Schere zum Kürzen des Fadens reichen aus um festzustellen:

- Je länger der Faden desto länger dauert das Hin- und Herschwingen des Gewichts
- Der Rhythmus bleibt auch erhalten, wenn die die Pendelbewegung schwächer wird
- Die Geschwindigkeit sinkt weil der Weg innerhalb einer Schwingung geringer wird, der Rhythmus sich aber nicht verändert.
- Der Rhythmus verändert sich nicht, wenn man leichtere oder schwerere Gewichte an den Faden hängt.

In welchem Rhythmus würde eine auf den Mond gestellte Pendeluhr ticken?
Was wäre im Zustand der Schwerelosigkeit, zum Beispiel im freien Fall zu erwarten?
Was schlägt die Pendeluhr, wenn sie in die Nähe eines Schwarzen Lochs gerät?

Eine mögliche Vermutung:
Der Rhythmus des Pendels hängt von der Länge des Fadens und von der "Schwerkraft" ab.

Der Rhythmus des Pendels wird im Folgenden physikalisch korrekter "Periode" genannt.

Der Zusammenhang zwischen Periode (*t* in Sekunden, s), Pendellänge l (in Metern) und der Erdbeschleunigung g (m/s^2) wird ausgedrückt durch die Formel

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \rightarrow t^2 = \frac{4\pi^2 * l}{g}$$

Nach der Länge des Pendels umgestellt:

$$l = \frac{g * t^2}{4\pi^2}$$

Mit der nach l umgestellten Formel kann man ein „Sekundenpendel“ bauen, dass man wie ein Metronom benutzen kann. Die Erdbeschleunigung g = 9,81 m/s^2 wird zunächst als fester Wert eingesetzt. Soll die Schwingungsdauer 1 Sekunde betragen muss die Länge des Pendels

$$l = \frac{9{,}81 m/s^2 * 1^2}{4\pi^2}$$

= 0,248 m (≈ 25 cm) betragen

Ein solches Pendel braucht 1 Sekunde um nach dem Auslenken aus der Senkrechten wieder an in die Nähe des Ausgangspunkts zurückzukehren.

Ein Pendel mit 1 m Länge hat eine Schwingungsdauer von

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9{,}81\ m/s^2}}$$

= 2,0006 (≈ 2) Sekunden

Umgekehrt kann aus der gemessenen Schwingungsdauer *g* ermittelt werden:

$$g = \frac{4\pi^2 * l}{t^2}$$

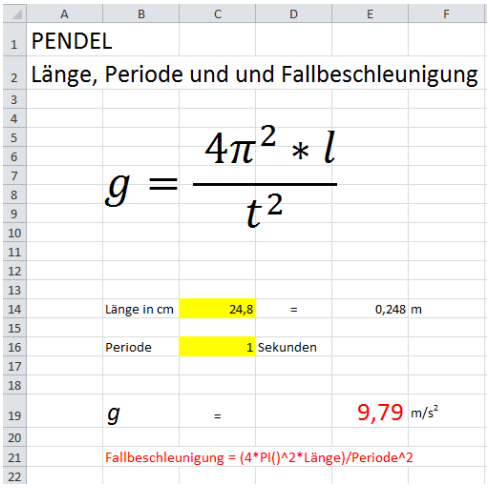
Für eine Periode von 2 s gilt

$$g = \frac{4\pi^2 * 1}{2^2}$$

= 9,87 m/s^2

Eine Periode mit der Stoppuhr genau zu erfassen ist schwer. Besser ist es, das Pendel viele Male hin und herschwingen zu lassen, etwa 15 Sekunden lang und dabei die Perioden zu zählen.

Ermitteln wir in 15 Sekunden 7 ½ Perioden so ist die Periodendauer 15/7,5 = 2s



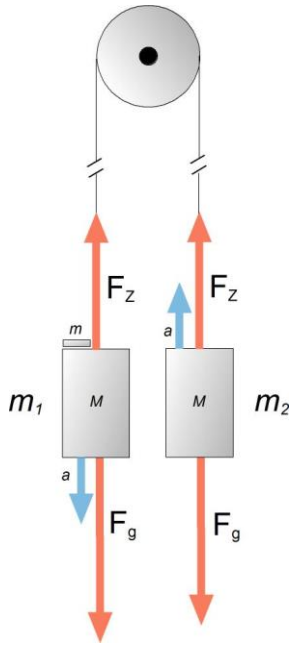
Auch hier kann man sich ein kleines Excel-Programm schreiben und die gemessenen Längen und Perioden eingeben.

Das könnte man, pädagogisch sinnvoller, natürlich auch "zu Fuß" ausrechnen. Der Vorteil eines "Programms" ist jedoch, dass man mit den Werten auch spielen kann und sieht, was geschieht, wenn man die Länge oder die Periode ändert.

Dabei ist zu erkennen, dass Länge und Periode fest miteinander gekoppelt sind und nur von der Fallbeschleunigung abhängen.

Freier Fall in Zeitlupe: Die „Fallmaschine“

Der englische Physiker George Atwood (1745 - 1807) hat 1784 eine nach ihm benannte "Fallmaschine" entwickelt. Zwei an einer Rolle hängende Gewichte, deren Massen leicht voneinander abweichen, ermöglichen es, den freien Fall und die Fallbeschleunigung in "Zeitlupe" zu beobachten und zu untersuchen.



Dabei sei die eine Masse des einen Gewichts (m_1) um den Betrag m schwerer als die Masse M des zweiten Gewichts (m_2).

Auf beide Gewichte wirken nach oben bzw. nach unten gerichtete Kräfte ein: Die nach oben gerichtete Seil- oder Zugkraft F_Z ist für beide Gewichte gleich groß, die nach unten gerichtete Gravitationskraft F_G ist bei m_1 größer als bei m_2.

Das Gewicht m_1 (M+m) bewegt sich nach unten, das Gewicht m_1 (M) wird um den gleichen Betrag angehoben.

Die Fallbeschleunigung g von m_1 wird durch m_2 verzögert. Die resultierende Beschleunigung a ist für m_1 nach unten, für m_2 nach oben gerichtet und für beide gleich groß.

Die Masse m_1 sei 63g, m_2 sei 59g

Die nach oben gerichteten Zugkräfte F_Z sind für beide Massen gleich.

$$F_Z = m_1 g - m_1 a \rightarrow m_1(g - a)$$
$$F_Z = m_2 g + m_2 a \rightarrow m_2(g + a)$$

$$F_Z = 0{,}063\text{kg}(9{,}81\text{m/s}^2 - 0{,}32\text{m/s}^2) = 0{,}598\text{N}$$
$$F_Z = 0{,}059\text{kg}(9{,}81\text{m/s}^2 + 0{,}32\text{m/s}^2) = 0{,}598\text{N}$$

m_2 wird oben beschleunigt (a ist positiv), m_1 nach unten (a ist negativ):

$$F_Z - m_1 g = m_1 a_1 \rightarrow F_Z - m_1 g = -m_1 a$$

$$F_Z - m_2 g = m_2 a_2 \rightarrow F_Z - m_2 g = +m_2 a$$

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen und Umstellen erhalten wir:

$$m_1 g - m_1 a = m_2 g + m_2 a$$

$$m_1 g - m_2 g = m_1 a + m_2 a$$

$$g(m_1 - m_2) = a(m_1 + m_2)$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

und

$$a = \frac{63\text{g} - 59\text{g}}{63\text{g} + 59\text{g}} g = 0{,}03279 * 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 0{,}32\text{m/s}^2$$

Zwischen Fallstrecke, gemessener Fallzeit und Beschleunigung besteht folgende Beziehung (Weg-Zeit-Gesetz):

$$s = \frac{1}{2} a * t^2$$

Nach *t* (Zeit in Sekunden) bzw. *a* (Beschleunigung in m/s^2) aufgelöst:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

$$a = \frac{2s}{t^2}$$

Die Erdbeschleunigung *g* folgt aus

$$F_{res} = m_{res} * a$$

$$m * g = (2M + m) * a$$

$$g = \frac{(2M + m) * a}{m}$$

Dafür kann man, wie oben, auch schreiben

$$g = a \frac{(m_1 + m_2)}{(m_1 - m_2)}$$

Beispiel:

- Die Masse m_1 betrage 63 g, die Masse m_2 sei 59 g.
- Die Fallstrecke sei *s* = 0,90 m
- Die gemessene Zeit sei 2,3 Sekunden

Daraus resultiert die Beschleunigung

$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{1{,}8\mathrm{m}}{2{,}3\mathrm{s}^2} = 0{,}32\mathrm{m/s}^2$$

und die Erdbeschleunigung

$$g = a \frac{(m_1+m_2)}{(m_1-m_2)} = 0{,}32\mathrm{m/s}^2 * \frac{(0{,}063\mathrm{kg}+0{,}059\mathrm{kg})}{(0{,}063\mathrm{kg}-0{,}059\mathrm{kg})} = 9{,}76\ \mathrm{m/s}^2$$

Das Ergebnis käme dem tatsächlichen Wert (g = 9,81m/s^2) schon sehr nahe.

Aber: Durch Reibungsverluste und das Trägheitsmoment der nicht masselosen Rolle wird die gemessene Fallzeit natürlich größer sein als der obige idealisierte Wert:

Aus einer im Experiment manuell gemessenen Zeit von 3 s folgt:

$a = \frac{1{,}8\mathrm{m}}{3{,}0\mathrm{s}^2} = 0{,}2\mathrm{m/s}^2$ und $g = 0{,}2\mathrm{m/s}^2 * \frac{(0{,}063\mathrm{kg}+0{,}059\mathrm{kg})}{(0{,}063\mathrm{kg}-0{,}059\mathrm{kg})} = 6{,}1\ \mathrm{m/s}^2$

Versuchsreihe (06.11.15)

Stativ, Rolle mit Kugellager, Radius 5,25 cm, Masse 116 g,
2 Schalen (je 12g), Gewichtssatz (50,20,10,5,2,1g)

$$g = a\frac{(m_1+m_2)}{(m_1-m_2)}$$

m_1	m_2	s	t		$a = \frac{2s}{t^2}$		$g = a\frac{(m_1+m_2)}{(m_1-m_2)}$
34 g	32 g	1 m	3,42s		0,171 m/s^2		5,64 m/s^2
37 g	32 g	1 m	2,09s		0,458 m/s^2		6,32 m/s^2
42 g	32 g	1 m	1,40s		1,020 m/s^2		7,55 m/s^2
62 g	57 g	1 m	2,50s		0,320 m/s^2		7,62 m/s^2
62 g	59 g	1 m	3,70s		0,146 m/s^2		5,69 m/s^2
62 g	60 g	1 m	5,50s		0,066 m/s^2		4,03 m/s^2

Der Durchschnitt beträgt hier "nur" 6,14 m/s^2.

Unter Berücksichtigung des Trägheitsmoments der Rolle ergeben sich höhere Werte!
Das Trägheitsmoment ist die Kraft, die notwendig ist um die Rolle in Bewegung zu setzen.
Sie ist abhängig von der Masse und dem Radius der Rolle.

m_r → Masse der Rolle m_r = 116g
→ Radius r = 5,25 cm

Trägheitsmoment $J = m * r^2$

Für eine Scheibe gilt $J = \frac{1}{2}m * r^2$ (massiger Zylinder)
Die Atwood-Formel mit Berücksichtigung des Trägheitsmoments der Rolle lautet

$$g = a\frac{\left(m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}\right)}{(m_1 - m_2)}$$

Nach Einsetzung von $J = \frac{1}{2}m * r^2$ folgt:

$$g = a\frac{\left(m_1 + m_2 + \frac{\frac{1}{2}m_r * r^2}{r^2}\right)}{(m_1 - m_2)}$$

Nach Kürzen:

$$g = a\frac{\left(m_1 + m_2 + \frac{m_r}{2}\right)}{(m_1 - m_2)}$$

Mit m_{Rolle} = 116 g

m_1	m_2	s	t		$a = \frac{2s}{t^2}$		$g = a\frac{\left(m_1 + m_2 + \frac{m_r}{2}\right)}{(m_1 - m_2)}$
34 g	32 g	1 m	3,42s		0,171 m/s^2		10,60 m/s^2
37 g	32 g	1 m	2,09s		0,458 m/s^2		11,63 m/s^2
42 g	32 g	1 m	1,40s		1,020 m/s^2		13,47 m/s^2
62 g	57 g	1 m	2,50s		0,320 m/s^2		11,33 m/s^2
62 g	59 g	1 m	3,70s		0,146 m/s^2		8,72 m/s^2
62 g	60 g	1 m	5,50s		0,066 m/s^2		5,95 m/s^2

Der Durchschnitt beträgt 10,28 m/s^2

In Kenntnis des "Zielwerts" (g = 9,81 m/s^2) führt die Fehlerdiskussion zu folgenden Fragen:

- Worin liegt die Abweichung vom tatsächlichen Wert begründet?
- Wie lässt sich der Versuchsaufbau verbessern?

Daraus ergeben sich z.B. diese Fragen und Hypothesen:

- Wie genau ist die Messung mit Auge und Stoppuhr?
- Wie groß ist die individuelle Reaktionszeitverzögerung?

- Wie groß sind die Reibungsverluste der Rolle?
- Welche Reibungsverluste treten sonst noch auf?
- Wie stark beeinflusst die Rolle selbst das Ergebnis?
- Welche Rolle spielt ihr Durchmesser, ihre Breite und ihre Masse?
- Wie beeinflusst das Masseverhältnis Gewichte/Rolle das Ergebnis?
- Erhält man mit größeren schwereren Gewichten bessere Ergebnisse?
- Erhält man bei stärker (oder weniger) abweichenden Massen bessere Ergebnisse?
- Welche Wirkung haben schwerere Gewichte auf die Reibung?

Wie schwer ist die Erde? Kugelvolumen und Dichte

Die Masse der Erde lässt sich leicht bei Wikipedia nachschlagen. Sie beträgt unvorstellbare $5{,}974*10^{24}$kg. So weit, so gut. Nur wie hat man das gemessen? Nicht mit einer Waage!

Wenn man die Größe der Erde, also das Volumen der "Kugel" kennt, könnte man Teile davon abwiegen und die Ergebnisse auf das Ganze hochrechnen. Die Formel für das Volumen einer Kugel ist

$$V = \frac{4}{3}\pi * r^3$$

Exkurs „Kugelvolumen“:

Vielleicht eine (lösbare) „Forscherfrage“ zwischendurch? Wie groß ist der Rauminhalt einer Kugel? Kann man das experimentell lösen und eine (einfache!) verallgemeinernde Formel dafür finden? Und dann ausgehend von „begreifbaren“ Kugeln das Volumen der Erde berechnen?

Eine Kugel mit einem beliebigen Durchmesser kann von einem Quader umschlossen werden, dessen Seitenlänge gleich dem Kugeldurchmesser ist. Die Kugel passt also genau in den Quader hinein.

- Miss den Durchmesser der Kugel mit der Schieblehre.
- Mit Hilfe eines Überlaufgefäßes und eines fein skalierten Messgefäßes wird gemessen, wie viel Wasser die Kugel beim Eintauchen verdrängt.
- Berechne das Volumen des die Kugel umschließenden Quaders.
- Bestimme den Quotienten der Volumina Kugel und Quader.

Beispiele:

Durchmesser Kugel (cm)	Volumen Kugel (cm^3)	Seitenlänge Quader (cm)	Volumen Quader (cm^3)	Quotient V_{Kugel}/V_{Quader}
1	0,534	1	1	0,534
2	4,189	2	8	0,524
3	14,137	3	27	0,534
4	33,510	4	64	0,524

Der Quotient ist - für welche Kugeln und ihre umschließenden Quader auch immer – stets 0,534.

Damit lautet die Formel in ihrer einfachsten Form $V_{Kugel} = 0{,}534*V_{Quader}$

Die Vermutung liegt nahe, dass bei der Berechnung einer Kugel die Kreiszahl Pi (3,14159…) im Spiel ist. Tatsächlich entspricht der stets wiederkehrende Quotient 0,534 einem Sechstel von Pi.

Daraus folgt $V_{Kugel} = \frac{1}{6}\pi d^3$ oder 0,523598…*d^3

Da der Durchmesser der doppelte Radius ist kann man $\frac{1}{6}\pi d^3$ auch als $\frac{1}{6}\pi(2r)^3$ oder $\frac{1}{6}\pi 8r^3$ schreiben.

Daraus folgt $\frac{8}{6}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$

Ist der Radius der Kugel bekannt, ist ihr Volumen leicht auszurechnen.

$$V = \frac{4}{3}\pi * 6371000\mathrm{m}^3 = 1{,}08320*10^{21}\mathrm{m}^3$$

Hätte ein Kubikmeter unserer Erde ein einheitliches Gewicht, könnte man bequem die Masse der ganzen Erde berechnen.

Rechnen wir mit der wieder bei Wikipedia nachgeschlagenen durchschnittlichen Dichte der Erde 5,515 g/cm^3 = 5,515*10^{3}kg/m^3 erhalten wir eine Erdmasse von

$$1{,}0832*10^{21}m^3 * 5{,}515*10^3kg/m^3 = 5{,}974*10^{24}kg$$

Die Dichte der Erde, das Verhältnis von Masse und Volumen ist aber alles andere als konstant. Relativ leichte kontinentale Erdkruste, bestehend z.B. aus Granit "schwimmt" auf schwererer ozeanischer Kruste die z.B. aus Basalt besteht. Tiefer im für uns unerreichbaren Erdmantel und im Erdkern ist die Dichte viel größer.

Durch eine geschickte Auswahl von Gesteins-Probestücken könnten wir uns dem Durchschnittswert der Erddichte nähern. Da wir den tatsächlichen Wert jederzeit nachschlagen können ist es möglich die Aussagekraft dieser Methode zu testen. So werden wir feststellen, dass die Dichten von oberflächennahen Sedimentgesteinen (Sand-, Kalksteinen) falsche Massewerte ergeben. Daraus ist zu folgern, dass es noch schwerere Gesteine geben muss.

Wie bestimmt man die Dichte eines Gesteinsstückes?

Zunächst wird der Stein gewogen.

In einem zweiten Schritt wird das Volumen des Steins ermittelt. Dazu füllt man ein passendes Gefäß, z.B. einen Messbecher mit Ausguss randvoll mit Wasser und lässt den Stein sanft hineingleiten. Das verdrängte herausfließende Wasser wird mit einem Messgefäß aufgefangen und dessen Volumen abgelesen.

Die Dichte ρ (rho) ist der Quotient der Masse (*m*) und des Volumens (*V*):

$$\rho = \frac{m}{V}$$

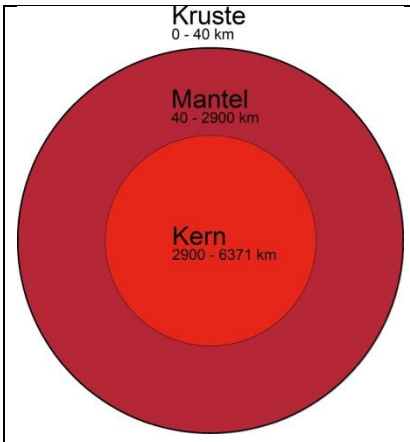
Beispiel: Ein Stein mit einem Gewicht von 155g und einem Volumen von 49 cm^3 hat die Dichte

$$\rho = \frac{155g}{49cm^3} = 3{,}16\ g/cm^3$$

Wenn die Dichte von 10 Probestücken einen Mittelwert von 2,5 g/cm^3 ergibt erhalten wir, multipliziert mit dem Volumen der Erdkugel, eine Erdmasse die erheblich unter dem richtigen Wert liegt

$$1{,}0832*10^{21}m^3 * 2{,}5*10^3kg/m^3 = 2{,}708*10^{24}kg$$

Es muss also noch schwereres Gestein geben!

	Fast 32% der Erde besteht aus Eisen. Wenn wir die Dichte einer Eisenkugel bestimmen erhalten wir Werte von etwa 7,9 g/cm^3 oder 7900 kg/m^3 Eine "Erde" aus 32% Eisen und 68% leichteren Gesteinen würde eine mittlere Dichte von 7900 kg/m^3*0,32 + 2700 kg/m^3*0,68 = 4364 kg/m^3 haben. Das ist immer noch viel zu wenig. Da wir selbst nicht in die Tiefe steigen können, um weitere Proben an die Erdoberfläche zu holen, verlassen wir uns auf Zahlen aus dem Lexikon: Die Erde ist aus Schalen aufgebaut, der äußeren Erdkruste, dem darunter liegenden Erdmantel und dem Erdkern im Zentrum.

Die Mächtigkeiten und Dichten der Schalen sind durch geophysikalische Fernerkundungen ermittelt worden. Damit ist es möglich, die Gesamtdichte der Erde zu bestimmen:

	Tiefe	Volumenanteil (gerundet)	Dichte
Erdkruste	0 - 40 km	1%	2,8 g/cm^3
Erdmantel	40 - 2900 km	83%	4,5 g/cm^3
Erdkern	2900 - 6371 km	16%	11,0 g/cm^3

Daraus errechnen wir eine fast an den offiziellen Wert heranreichende Gesamtdichte von

2,8 g/cm^3 * 0,01 + 4,5 g/cm^3 * 0,83 + 11,0 g/cm^3*0,16 = 5,523 g/cm^3

Die Volumenanteile von Erdkruste, Erdmantel und Erdkern lassen sich in Kenntnis ihrer Tiefen natürlich auch selbst errechnen.

$$V = \frac{4}{3}\pi * {r_1}^3 - \frac{4}{3}\pi * (r_1 - r_2)^3$$

Daraus ergeben sich folgende Teilvolumina und prozentuale Anteile:

Kruste	$r_{Erde} - (r_{Mantel} + r_{Kern})$	$V = \frac{4}{3}\pi * 6371000m^3 - \frac{4}{3}\pi * 6331000m^3$	2,027*10^{19}m^3	2%
Mantel	$(r_{Mantel} + r_{Kern}) - r_{Kern}$	$V = \frac{4}{3}\pi * 6331000m^3 - \frac{4}{3}\pi * 3471000m^3$	8,878*10^{20} m^3	82%
Kern	r_{Kern}	$V = \frac{4}{3}\pi * 3471000m^3$	1,752*10^{20} m^3	16%
Erde			1,083*10^{21} m^3	100%

Was wäre, wenn die Erde nur aus Granit bestünde?

Nehmen wir an, wir hätten die Dichte eines Granits zu 2,5g/cm^3 bestimmt.

Dann hätte die Erde eine Masse von 1,0832*10^{21}m^3 * 2,5*10^{3}kg/m^3 = 2,708*10^{24}kg.

Welche Möglichkeiten haben wir festzustellen, dass das nicht stimmen kann?

Wir können schon mal vorwegnehmen: Bestünde die Erde tatsächlich ausschließlich aus Granit, könnten wir viel größere Sprünge machen und Treppensteigen wäre erheblich leichter!

Zwischen der Masse (*m*), der Fallbeschleunigung (*g*), dem Radius der Masse (*r*) und der Gravitationskonstanten (*G*) besteht folgender Zusammenhang

$$m = \frac{g * r^2}{G}$$

Nach *g* umgestellt:

$$g = \frac{m * G}{r^2}$$

Mit *m* = 2,708*10^{24}kg, der Gravitationskonstanten *G* = 6,67*10^{-11} und dem Erdradius r = 6371000m ist

$g = \frac{2{,}708*10^{24}\mathrm{kg}*6{,}67*10^{-11}}{6371000\mathrm{m}^2}$ = 4,4 m/s^2

Zur Kontrolle:

Mit der „korrekten“ Masse 5,947*10^{24}kg gerechnet ist

$g = \frac{5{,}947*10^{24}\mathrm{kg}*6{,}67*10^{-11}}{6371000\mathrm{m}^2}$ = 9,8 m/s^2

Mit 4,4 m/s^2 würde ein Stein nach einer Sekunde 2,2 m (statt 4,9 m) fallen.

Sekunden	Fallstrecke s (m) bei a = 4,4m/s^2	Fallstrecke s (m) bei a = 9,8m/s^2
0	0,0	0,0
1	2,2	4,9
2	8,8	19,6
3	19,8	44,1
4	35,2	78,4
5	55,0	122,5
6	79,2	176,4

Ermittlung der Gravitationskonstanten „*G*“

Ist die Fallbeschleunigung ermittelt und die Erdmasse bestimmt kann man die Gravitationskonstante herausrechnen.

In der Wissenschaftsgeschichte musste man den Weg andersherum begehen und den Wert von *G* durch sehr sensible Experimente finden. Mit einer Gravitationswaage, viel Zeit, Geduld und einer sehr erschütterungsfreien Umgebung kann man die Messung von *G* auch in der Schule nachvollziehen. Wir skizzieren das Verfahren weiter unten.

Zwischen der Masse, der Fallbeschleunigung, dem Radius der Masse und der Gravitationskonstanten besteht folgender Zusammenhang

$$m = \frac{g * r^2}{G}$$

Nach *G* umgestellt:

$$G = \frac{g * r^2}{m}$$

Sind Fallbeschleunigung, Masse und Erdradius bekannt erhalten wir mit

mit g = 9,8 m/s^2 , m = 5,974 · 10^{24} kg und r = 6371000m:

$G = \frac{9{,}81 m/s^2 * 6371000 m^2}{5{,}974 \cdot 10\mathrm{kg}^{24}}$ = 6,67*10^{-11}

"Anziehungskraft"

Ich verstehe nicht, warum die beiden zusammen sind.
Muss wohl an der Anziehungskraft liegen…

Isaac Newton formulierte ein Gesetz, nach dem Massen sich gegenseitig anziehen. Die Stärke dieser "Anziehungskraft" ist abhängig vom Produkt dieser Massen und vom Quadrat ihres Abstandes zueinander:

$$"Anziehungskraft" = \frac{M * m}{r^2}$$

Die von den Massen ausgehenden Anziehungskräfte greifen in alle Richtungen in den Raum aus und werden wie das von einer kugelförmigen Leuchte ausgesandte Licht mit wachsendem Abstand schwächer, denn das Licht verteilt sich auf immer größere Flächen.

Die Oberfläche einer Kugel ist $A_O = 4\pi r^2$ Damit stehen die Oberflächen einer bestimmten Kugel und einer doppelt so großen Kugel im Verhältnis 1:4.

Kugel-Radius *r*	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm
Oberfläche A_O	12,57 cm^2	50,27 cm^2	113,1 cm^2	201,06 cm^2	314,16 cm^2

Die Masse wird in der SI-Einheit Kilogramm (kg) angegeben.
Die Formel "$Anziehungskraft" = \frac{M*m}{r^2}$ kann auch bei genauer Kenntnis der Massen nur Relationen wiedergeben.

Die Stärke der "Anziehungskraft" F_g lässt sich nur angeben, wenn man weiß, wie stark ein Kilogramm von einem anderen Kilogramm angezogen wird, d.h. welche Kraft auf solche Standard-Massen wirkt.
Der entsprechende Multiplikator wird als "Gravitationskonstante" *G* bezeichnet

$$F_g = G * \frac{M * m}{r^2}$$

G ist eine Größe, die man mit einigem Aufwand, prinzipiell aber auch in der Schule, experimentell ermitteln kann.

Wie stark ist die "Anziehungskraft" zwischen zwei Massen von je 1 kg, z.B. zwei Gewichten einer Waage?
Stehgreifversuche zeigen, dass die Kraft sehr gering sein muss, was auch unserer Alltagserfahrung entspricht:

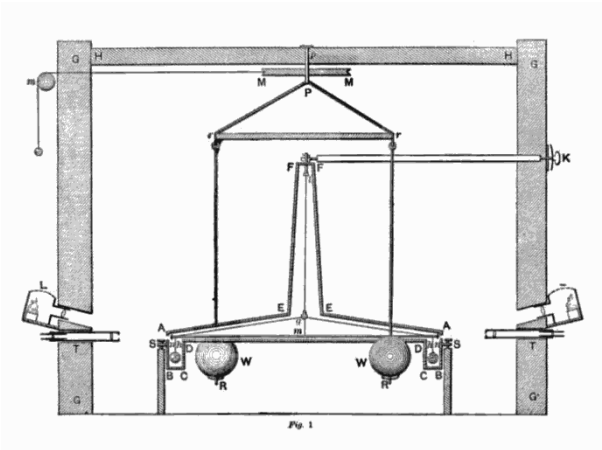
- 2 frei nebeneinander hängende schwere Metall-Kugeln scheinen sich nicht anzuziehen..
- Auch große (massereiche) Objekte wie Häuser oder Autos bewegen oder neigen sich nicht aufeinander zu.
- Oder ist die "Anziehung" so gering, dass wir sie nicht wahrnehmen können?

Wie groß, oder besser, wie klein ist *G*?

Messen der „Anziehungskraft“: Die Gravitationsdrehwaage

Hängt man eine schwere, mit einem Spiegel versehene und nicht magnetische (!) Metallkugel an einem Faden auf und lässt sie vollkommen zur Ruhe kommen kann man einen Laserstrahl so auf den Spiegel richten, dass der reflektierte Strahl auf einer weit entfernten Projektionsfläche einen Lichtpunkt bildet.
Je größer die Entfernung, desto deutlicher wird jede noch so kleine Unruhe oder Auslenkung der Kugel zu beobachten sein.
Was geschieht, wenn man eine zweite Masse in die Nähe der Kugel bringt?
Die „Anziehung“ zwischen den beiden Kugeln ist so gering, dass man eher den eher Luftbewegungen oder das Schwingen des Gebäudes wahrnehmen wird. Bei einem so gestalteten Experiment im Energie-LAB der IGS Mühlenberg haben wir eher die unter dem Gebäude durchfahrende U-Bahn abbilden können als die zwischen den Kugeln wirkenden Kräfte.

Um diese tatsächlich sehr geringen Kräfte darzustellen und daraus den Wert „*G*“ zu bestimmen braucht man eine "Gravitations-Drehwaage", sehr viel Zeit und Geduld für den Aufbau der Versuchsapparatur und einen wirklich schwingungsfreien Raum.

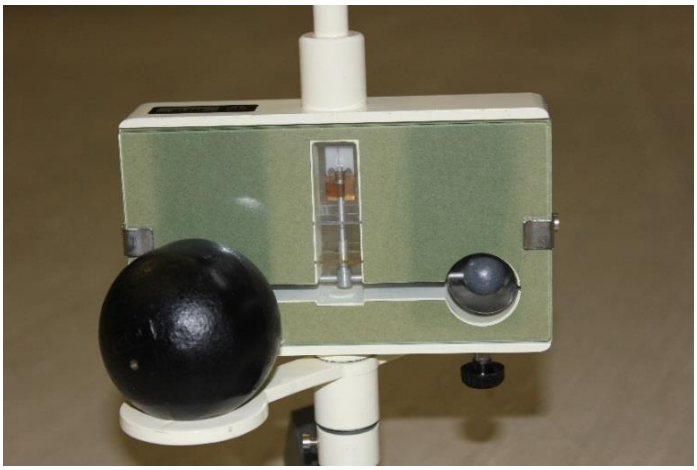


Experiments to determine the Density of the Earth' published in *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, (part II) **88** p.469-526 (21 June 1798), WIKIPEDIA: Cavendish

Die Gravitationsdrehwaage geht auf den Engländer Henry Cavendish (1731 - 1810) zurück. Er nutzte eine bereits zu anderen Zwecken erfundene Torsionswaage zur Bestimmung der Dichte der Erde.

"Cavendish führte während eines ganzen Jahres sein Experiment 17-mal durch und berücksichtigte auch kleinste denkbare Störungen. Seine Endergebnisse für die Masse und Dichte der Erde weichen von heutigen Werten nur um 1 % ab." (WIKIPEDIA)

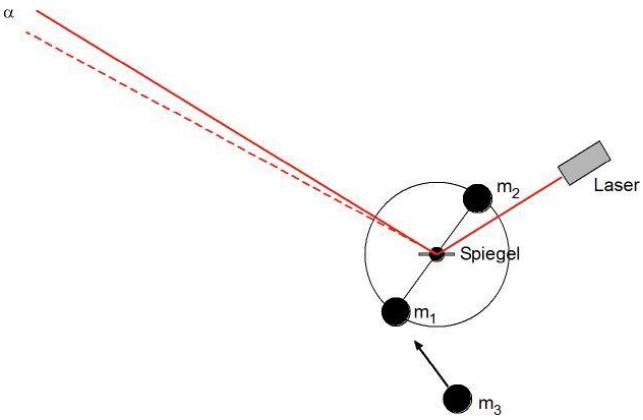
Daraus wurde allerdings erst in der 2. Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts die "Gravitationskonstante".



Oben links:
Gravitations-Drehwaage (Leybold) auf Stativ. Lange Senkrechte Drehachse mit Torsionsdraht und Spiegel, zwei an horizontalem Stab aufgehängte kleine Massen. Große schwenkbare Masse

Oben rechts:
Auschnittsvergrößerung

Unten rechts:
Versuchsaufbau mit auf Spiegel gerichtetem Laserstrahl. Projektion in etwa 20 m Distanz (über zwei Spiegel)
(Lenkt der Kaffee ab?)



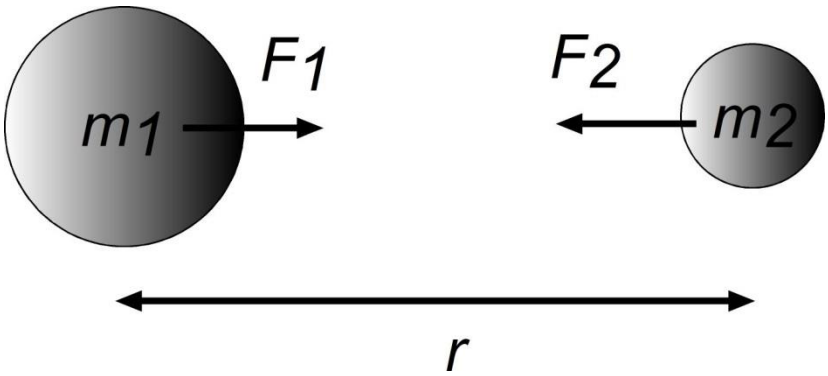
Das Prinzip einer solchen Waage:
Zwei gleiche Massen (m_1, m_2), am Ende eines reibungsarm an einem dünnen Draht aufgehängten Stabes werden durch Annäherung einer dritten Masse (m_3) geringfügig ausgelenkt.
In der Drehachse des Stabes befindet sich ein Spiegel.
Der Draht verdreht sich langsam (!) um ein bekanntes, vom Hersteller experimentell bestimmtes Maß (Torsionsdraht) und schwingt dann wieder zurück und mit nachlassender Amplitude nach.
Der Grad der Auslenkung wird mit Hilfe eines auf den Spiegel gerichteten Laserstrahls ermittelt der auf eine möglichst weit entfernte Fläche projiziert wird.

Die Auslenkung ist nur sehr klein und lässt sich nur zeigen wenn die Versuchsapparatur weitestgehend reibungs- und schwingungsfrei gelagert ist.
Bei in Schulen üblichen Gravitations-Drehwaagen ist der Spiegel an einem dünnen Bronzedraht aufgehängt der durch die Auslenkung eine geringe Torsion erfährt und hin und herschwingend zur Ruhelage zurückfindet.
Das langsame Hin-und Herschwingen des projizierten Laserstrahls und die Entfernung zwischen Spiegel und Laserpunkt im Nullpunkt der Schwingung muss sehr genau vermessen werden.
Das Verhältnis der Auslenkung zur Distanz ergibt zusammen mit der der genau abgewogenen Masse (große Kugel) die Gravitationskonstante.
Die genaue Vorgehensweise und die Rechenschritte entnehmen Sie bitte der Experimentierbeschreibung des Herstellers Leybold.

Die im optimalen, aber in der Schule nicht realisierbaren Fall ermittelte Gravitationskonstante *G* würde $6{,}67*10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ betragen

Erdmasse aus Fallbeschleunigung und Gravitationskonstanten errechnen

$$F_1 = F_2 = G\frac{m_1 * m_2}{r^2}$$



Wenn sich ein Körper im freien Fall auf die Erdoberfläche zubewegt wird er in jeder Sekunde um 9,81 m/s schneller. Diese Fallbeschleunigung bewirkt, dass man nach einer Sekunde 9,81 m/s, nach zwei Sekunden 19,62 m/s und nach drei Sekunden 29,43 m/s schnell ist. Gäbe es keine Luftreibung würden alle Körper ungeachtet ihrer Masse die gleiche Geschwindigkeitszunahme erfahren und nach etwa 34 Sekunden mit 333 m/s die Schallmauer durchbrechen. Durch den Luftwiderstand wird die Beschleunigung allerdings nach etwa 7 Sekunden mit etwa 55 m/s Fallgeschwindigkeit deutlich reduziert.

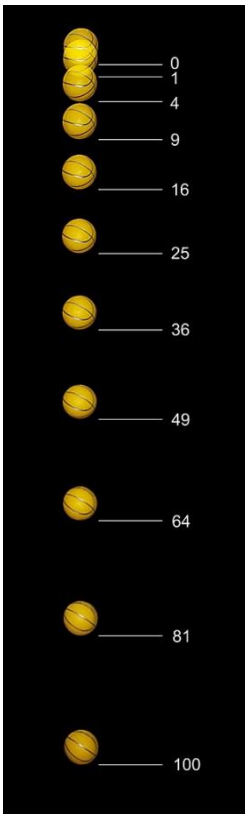
Die in der Zeit *t* zurückgelegte Strecke *s* beträgt stets die Hälfte der Endgeschwindigkeit. Nach Beschleunigung aus der Ruhehelage erreicht ein eine Sekunde lang fallender Körper 9,8 m/s Geschwindigkeit und legt in dieser Zeit 4,9 m zurück.

$$s = 0{,}5 * g * t^2 \qquad t^2 = \frac{s}{0{,}5*g} \qquad t = \sqrt{\frac{s}{0{,}5*g}}$$

Ein von einem 20 m hohen Turm fallen gelassener Tennisball schlägt nach 2,0 Sekunden auf dem Boden auf. Wie groß ist die Fallbeschleunigung?

$$g = \frac{s}{0{,}5 * t^2}$$

g = ≈ 9,81 m/s



Freier Fall:

Der fallende Tennisball legt in gleichen Zeitsegmenten immer größere Strecken zurück.

Dabei ist der Weg *s* das Quadrat der Zeit *t*.

s	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$s = t^2$

Der Ball wird beim Fall beschleunigt und das Maß der Beschleunigung hängt ab von der Masse der Erde, der des Tennisballs und der Distanz zwischen ihren Schwerpunkten. Die Masse des Balls spielt im Verhältnis zur Erde nur eine verschwindend kleine Rolle.

In Sekundentakten ausgedrückt:
Nach 1 Sekunde ist der Ball 35 km/h schnell
Nach 2 Sekunden 71 km/h
Nach 3 Sekunden 106 km/h

Im Physikunterricht der IGS Mühlenberg wurde die Fallbeschleunigung mit Hilfe eines vom Dach fallenden Ziegelsteins gemessen. Der Ziegelstein wurde mit einem *Ipad* gefilmt und der Fall mit Hilfe des Programms "NewtonDV" ausgewertet.

Die Fallbeschleunigung 9,81 m/s^2 ermöglicht es, die Erde zu "wiegen", d.h. ihre Masse zu bestimmen.
Die Kraft mit der sich Erde und Körper gegenseitig anziehen wird bestimmt durch die beiden beteiligten Massen und durch ihren Abstand voneinander. Je größer das Produkt beider Massen und je kleiner ihr Abstand, desto größer ist die Anziehungskraft zwischen ihnen. Die Formel enthält zusätzlich den Wert *G*, die universell gültige Gravitationskonstante mit dem Wert 6,674*10^{-11}.

$$F = \frac{M_{Erde} * M_{Körper}}{G * r^2}$$

Die Masse des fallenden Körpers ist im Verhältnis zur Masse der Erde fast unendlich klein und kann aus der Formel herausfallen

$$F = \frac{M_{Erde}}{G * r^2}$$

Die Fallbeschleunigung ist ein Sonderfall der Beschleunigung die wir auch auf dem Motorrad erleben. In allen Fällen wird eine Masse aus der Ruhelage in Bewegung gesetzt. Die dafür erforderliche Kraft (*F*) setzt sich zusammen aus der beschleunigten Masse (*m*) und dem Maß ihrer Beschleunigung (*a*): Es gilt also $F = M_{Körper} * a$

$$M_{Körper} * a = \frac{M_{Erde} * M_{Körper}}{G * r^2}$$

Lösen wir die Formel nach *a* auf kürzt sich $M_{Körper}$ heraus:

$$a = \frac{M_{Erde}}{G * r^2}$$

Aufgelöst nach M_{Erde} erhalten wir:

$$M_{Erde} = \frac{a * r^2}{G}$$

Wird also für *g* die Fallbeschleunigung von 9,81 m/s^2 in die Formel gesetzt erhalten wir

$$M_{Erde} = \frac{9{,}81 m/s^2 * (6371 * 10^3 m)^2}{6{,}674 * 10^{-11}}$$

Und als Ergebnis die Masse der Erde:

5,97*10^{24} kg

Es gibt natürlich noch andere Methoden, die Erde zu wiegen. Zum Beispiel mit Hilfe der Umlaufzeit von Satelliten oder des Mondes. Man kann sogar die Masse der für uns unerreichbaren und heiße Sonne bestimmen und zwar aus dem Abstand zur Erde und der Länge eines Jahres.
Aber das ist schon ein anderes Projekt…

Schulbiologiezentrum Hannover,
November 2015

ANHANG

Formeln:

Weg, Zeit, Geschwindigkeit, (Fall)Beschleunigung

- *s* (Strecke, m)
- *t* (Zeit, s)
- *v* (Geschwindigkeit, m/s)
- *a* (Beschleunigung, m/s^2)
- *g* (Fallbeschleunigung, m/s^2)

$s = \frac{a*t^2}{2}$, $a = \frac{2s}{t^2}$, $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$

$v = a * t$, $a = \frac{v}{t}$, $t = \frac{v}{a}$

$$g = \frac{2s}{t^2} = a$$

Pendelschwingung

- *t* (Zeit, s)
- *l* (Länge, m)
- *g* (Fallbeschleunigung, m/s^2)

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow t^2 = \frac{4\pi^2 * l}{g}$$

Dreieck

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Kraft

- *F* (Kraft, N)
- *m* (Masse, kg)
- *a* (Beschleunigung, m/s^2)
- *g* (Fallbeschleunigung, m/s^2)

$F = m * a = m * g$

Fallbeschleunigung und Masse

- *M* (große Masse, kg)
- *m* (kleine Masse, kg)

$$F = m * a = m * g$$

$$m * g = (2M + m) * a$$

$$g = \frac{(2M+m)*a}{m} = a\frac{(m_1+m_2)}{(m_1-m_2)}$$

Kugel

- *V* (Volumen, m^3)
- *r* (Radius, m)

$$V = \frac{4}{3}\pi * r^3$$

Dichte

- ρ (Dichte, kg/m^3 bzw. g/cm^3)
- *m* (Masse, kg bzw. g)
- *V* (Volumen, m^3 bzw. cm^3)

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Masse, Fallbeschleunigung

- *m* (Masse, kg)
- *r* (Radius, m)
- *G* (Gravitationskonstante, $6{,}67*10^{-11}$)

$$m = \frac{g * r^2}{G}$$

Gravitationskraft zwischen 2 Massen

- *F* (Kraft, N)
- *g* (Fallbeschleunigung, m/s^2)
- *r* (Radius, hier: Entfernung zwischen den beiden Massepunkten, m)
- *m* (kleine Masse, kg)
- *M* (große Masse, kg)
- *m* (kleine Masse, kg)
- G (Gravitationskonstante, $6{,}67*10^{-11}$)

$$F = G * \frac{M * m}{r^2}$$

Herleitung des Newton´schen Gesetzes

$$F_G = F_Z$$

$$F_G = G * \frac{M * m}{r^2}$$

$$F = m * a$$

$$a = = \frac{v^2}{r}$$

$$2)\ F_G = m * \frac{v^2}{r}$$

$$G * \frac{M * m}{r^2} = m * \frac{v^2}{r}$$

$$G * \frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{r}$$