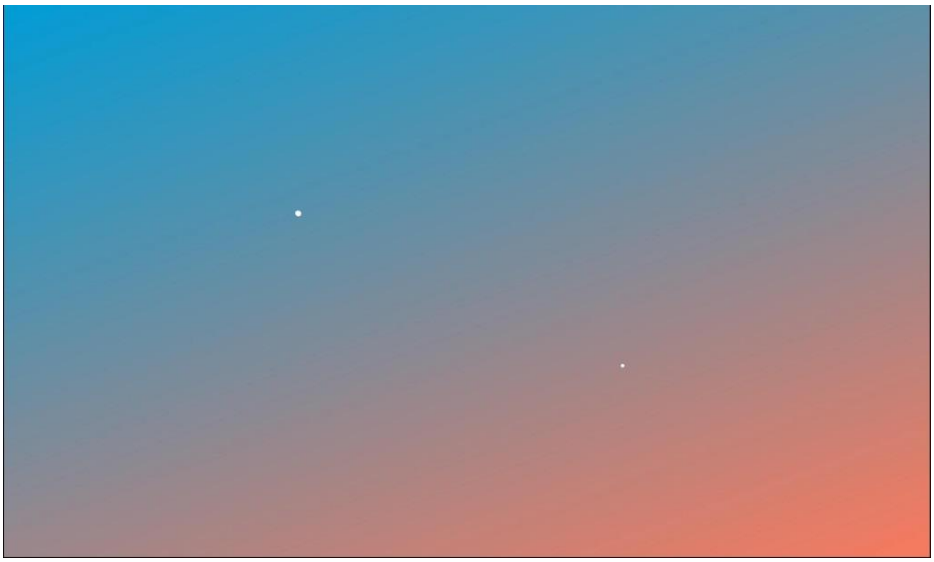
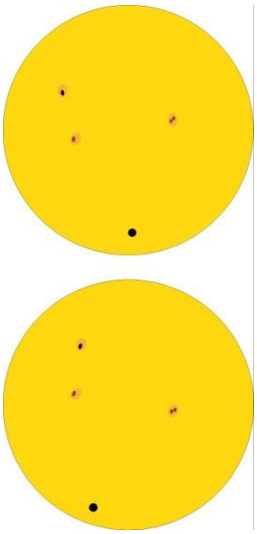
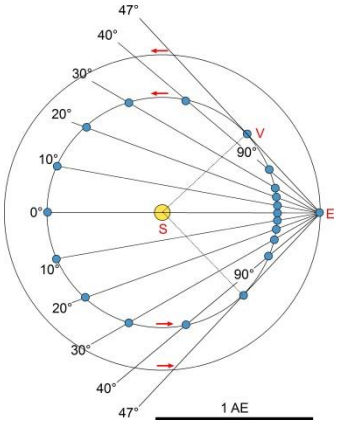
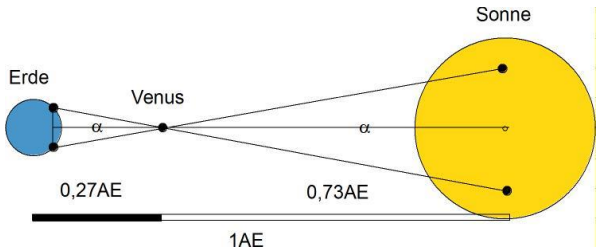
Landeshauptstadt Hannover

Schulbiologiezentrum









19.83

Venus und Merkur

Vom Phänomen "Morgen-/Abendstern" zur Größe des Sonnensystems

Februar 2016

Herausgeber: Landeshauptstadt Hannover
Schulbiologiezentrum Hannover

Titel: Venus und Merkur
Vom Phänomen "Morgen-/Abendstern" zur Größe des Sonnensystems

Titelbild: Ingo Mennerich

Arbeitshilfe 19.83

Verfasser: Ingo Mennerich

Herausgeber: Landeshauptstadt Hannover
Fachbereich Bibliothek und Schule
Schulbiologiezentrum
Vinnhorster Weg 2
30419 Hannover
Tel: 0511/168-47665
Fax: 0511/168-47352
E-Mail: schulbiologiezentrum@hannover-stadt.de
Internet: www.schulbiologiezentrum.info

Inhalt

Vorwort	4
Vom Versuch, ein Phänomen zu deuten und Regeln aufzustellen	5
Sichtbarkeitsfenster der Venus: Elongation und Winkel der Ekliptik zum Horizont	9
Die Phasen der Venus	12
Wie weit ist die Venus von uns entfernt? Ein erster Ansatz	12
Wann ist der Morgen- oder Abendstern das nächste Mal zu sehen?	14
"Abstandsmessung" Sonne-Venus: Wir nutzen unsere Hände als "Winkelmesser"	16
Wie weit ist die Venus im Verhältnis zur Sonne von uns entfernt?	17
Wie groß ist die Venus?	19
Wie weit ist die Venus wirklich entfernt?	22
Wie weit ist die Sonne von uns entfernt? Die Länge der "Astronomischen Einheit"	23
Wie lange braucht die Venus, um die Sonne einmal vollständig zu umkreisen?	23
In welchem Verhältnis stehen die Entfernungen und Umlaufzeiten zweier Planeten?	25
Die Newton´sche Herleitung des Kepler´schen Gesetzes	27
Merkur, der "schnelle" Bruder des "Morgen-" oder "Abendsterns"	30
Dem Merkur auf der Spur	31
Ausblick auf die äußeren Planeten	34

Verloren im All:
Unsere Erde und ihr Begleiter…

Nutzen wir das kleine Zeitfenster dass uns Menschen offensteht, um zu begreifen, dass wir, die diesen "blauen Planeten" zu beherrschen glauben, in Wirklichkeit den gleichen Gesetzen unterworfen sind wie alles in diesem unendlichen Kosmos.

Die Erde und der Mond, aufgenommen aus der Perspektive der den Saturn umkreisenden Sonde CASSINI (09. Juli 2013)

Bild: NASA

Vorwort

Der zur EXPO 2000 geschaffene "Planetenpfad" im Schulbiologiezentrum Hannover ist ein auf die Länge von 150 Metern reduziertes Modell des Sonnensystems. Die Grundidee war, die Abstände zwischen den Planeten und ihre Größe im selben Maßstab darzustellen. So übernimmt ein Golfball die Rolle der Sonne und die Erde ist ein kleiner blauer Stecknadelkopf. Auf dem Planetenpfad sind Sonne und die beim Bau noch neun Planeten entlang unseres Hauptweges aufgereiht und stehen still. In Wirklichkeit umkreisen die Planeten die Sonne, das heißt der "Planetenpfad" bildet das mehr oder weniger kreisförmige Sonnensystem natürlich nur unvollständig ab.
Die Größen der Sonne und der Planeten und die Abstände der Umlaufbahnen haben wir dem DIERCKE-Atlas entnommen der sich in guter Übereinstimmung mit allen anderen diesbezüglichen Quellen befindet.
Unser "Planetenpfad" zementiert die heutige heliozentrische Weltsicht. Wer würde daran zweifeln, dass die Planeten die Sonne umkreisen? Man würde sich schnell als Dummkopf "outen", wenn man etwas Gegenteiliges behaupten würde. Es ist einfach so!
Historisch betrachtet gilt das allerdings nicht. Die Menschheit hat lange gebraucht um sich von beobachtenden und klugen Querköpfen davon überzeugen zu lassen, dass nicht die Erde im Mittelpunkt allen Seins steht. Auf dem Wege zum heutigen Wissen sind manche dieser Köpfe gefallen.
Unser heutiges "Wissen" besteht aus den akkumulierten Beobachtungen und Erkenntnissen vieler Generationen. Dieses "Wissen" wurde erst durch stete Überprüfung mittels unterschiedlicher Perspektiven und Methoden zur (zumindest vorläufigen) Wahrheit.

Der blaue Planet auf dem wir wohnen ist, gemessen an den "unendlichen Weiten des Alls", nur ein "Krümel" Erde. Das gehört heute zur Alltagsphilosophie. Und daran ist, spätestens seit den Bildern, die die Erde aus großer Distanz zeigen, nicht mehr zu rütteln. Und da unsere Sinne und unser Verstand so eingerichtet sind, dass wir hinter jeder Grenze und jedem Raum neue Grenzen und Räume vermuten erscheint der Weltraum unendlich. Damit schrumpft auch unsere Erde, das Sonnensystem und die Sterne ins unendliche…

Dabei ziehen an klaren Tagen und Nächten doch Sonne, Mond und Sterne "zum Greifen" nahe über den Himmel.

Die sinnliche "egozentrische" oder "erdzentrierten" Erfahrung der Bewegungen am Himmel ist von "heliozentrischen" weit entfernt. Kein Wunder, dass es so lange gedauert hat, bis man die Erde aus dem Mittelpunkt der Welt holen konnte und durfte.

Sonne, Mond und Sterne bieten jedem Menschen, einfach oder studiert, bei wolkenarmen Himmel eine frei verfügbare Schaubühne, ein "Labor", in dem man durch die Beobachtung und den Vergleich von Phänomenen den astronomischen Erkenntnisprozess von der Steinzeit bis zum heutigen Tag nacherleben kann.

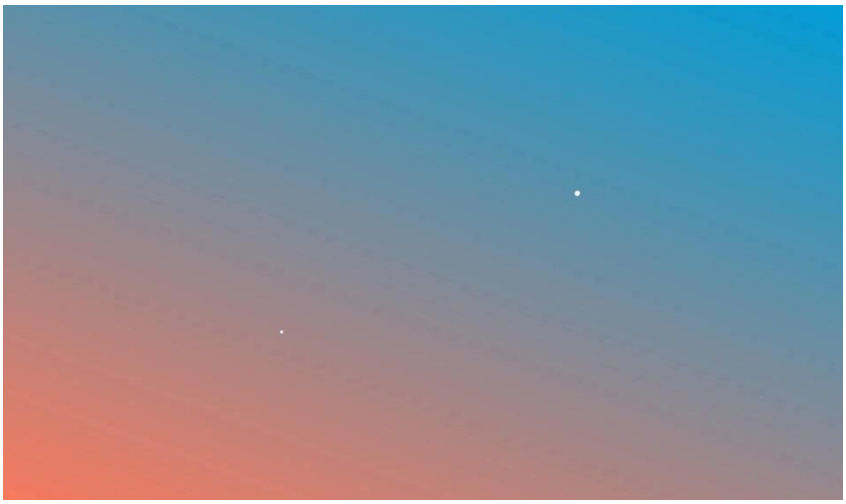
Dabei entsteht echtes Wissen und man wird selbst zum "Wissenschaftler": Gemeint ist nicht das "Wissen", dass man ohne jede Objektbetrachtung von Wikipedia übernimmt sondern das Wissen,

das auf der Mühe eigener Beobachtungen und Erfahrungen beruhend, durch eigene Schlussfolgerungen Gestalt gewinnt.

Einen solchen Weg möchten wir hier aufzeigen. Es geht um ein für alle ohne Vorkenntnisse sichtbares Phänomen, den "Abendstern" oder den "Morgenstern". Obwohl beide Begriffe in Quizshows eher der unteren Gewinnkategorie zuzuordnen sind haben wahrscheinlich die wenigsten unserer Zeitgenossen diese "Sterne" wirklich bewusst gesehen. Dabei können sie so hell am Morgen- bzw. Abendhimmel erscheinen, dass sie für Flugzeuge im Landeanflug oder sogar bei der Polizei als vermeintliche UFOs angezeigt werden.

Vom Versuch, ein Phänomen zu deuten und Regeln aufzustellen

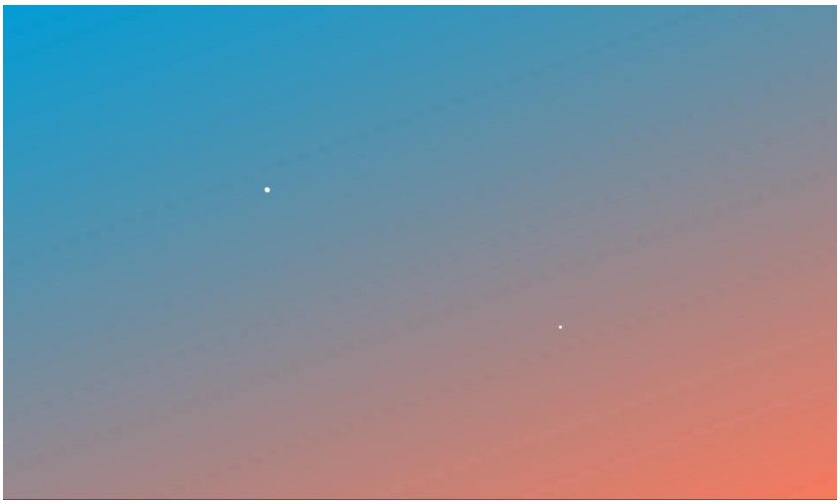
Morgens an der Straßenbahnhaltestelle. Es ist Januar und noch dunkel. Im Südosten kündigt sich die in einer Stunde aufgehende Sonne an. Der helle Lichtpunkt in der rötlichen Dämmerung ist kein Flugzeug. Auch nach 10 Minuten steht er noch am selben Platz. Am nächsten Tag zur selben Zeit ist er wieder da und in den nächsten Tagen wird er zum täglichen morgendlichen Begleiter. Das Wort "Sternwarte" bekommt einen ganz neuen Sinn: Ich warte jetzt täglich auf "meinen" Stern…
Nach einer Woche steht er deutlich tiefer und in der folgenden Zeit ist er nur mit Mühe zwischen den Bäumen auszumachen. Dabei scheint der "Stern" der Sonne auch immer näher zu kommen (oder kommt die Sonne ihm entgegen?). Bald ist es morgens bereits so hell, dass ich ihn, ganz schwach geworden, im rötlichen Dämmerlicht nur noch per Zufall finde.



Ich scheine der einzige an der Haltestelle zu sein, der diesen "Stern" verfolgt hat. Die anderen schauen auf ihre beleuchteten Displays ihrer Smartphones. Ob jemand dabei ist im Internet herauszufinden, worum es sich bei diesem hellen "Stern" gehandelt haben könnte? Keine "Breaking News" weisen darauf hin…

Nach einiger Zeit ohne meinen morgendlichen "Begleiter" taucht im Frühjahr ein neues Phänomen auf:

Ein heller "Stern" in der Abenddämmerung. Er wird von Tag zu Tag, von Woche zu Woche heller bis er der hellste Stern am ganzen Himmel ist.



Ich beschließe, ihn "meinen Abendstern" zu nennen und jeden Abend mindestens einmal zu ihm aufzublicken. Dabei entdecke ich einen zweiten "Stern" der sich langsam aber stetig von Tag zu Tag auf meinen "hellen" Abendstern zubewegt und ihn schließlich überholt. Oder ist es anders herum?

Mein "Morgenstern" bleibt in dieser ganzen Zeit wie vom Erdboden verschluckt.

Im Herbst geht mein "Abendstern" immer früher unter und verschwindet schließlich im Rot der Abenddämmerung.

Zunächst nur ein Gedanke: Könnte es sein, dass es sich beim "Morgenstern" und "Abendstern" um Ein und das Gleiche handelt? Das der "Stern" für einige Zeit am Morgen auftritt und dann wieder am Abend? Und könnte es sein, dass es sich bei den zu beobachtenden wachsenden und wieder geringer werdenden Abständen zur Sonne in Wirklichkeit um eine Kreisbewegung um die Sonne handelt? Das würde auch erklären, warum zwischen den Auftritten des "Morgen-" und des "Abendsterns" eine Periode liegt, wo beide nicht am Himmel stehen…

Meine "Theorie" findet eine erste Bestätigung als nach einiger Zeit wieder der "Morgenstern" am östlichen Himmel steht. Sein Abstand zur Sonne wächst von Tag zu Tag, zunächst schnell, dann aber immer langsamer. Schließlich passen, bei ausgestrecktem Arm, gut vier gespreizte Hände dazwischen. Dann wandert der "Morgenstern" wieder zurück zur Sonne, erst langsam, dann immer schneller bis er nach einigen Wochen im Licht der aufgehenden Sonne verschwunden ist.

Ein Kollege hat ein Fernrohr, ein richtig gutes sogar. Das leihe ich mir aus. Als der "Abendstern" wie gedacht wieder in der Abenddämmerung auftaucht wird er ganz nah herangeholt. Und das ist wirklich überraschend: Der "Stern" ist gar kein Stern, sondern eine winzig kleiner "Halbmond" der seinen beleuchteten Bauch der Sonne zuneigt. Mehrere Wochen verfolge ich, wie der "Halbmond" langsam zur "Mondsichel" wird und dabei ständig an Größe zunimmt. So als ob uns dieser kleine "Mond" entgegenkommt….

In der folgenden Zeit entstanden einige einfache Regeln

"Abendstern" und "Morgenstern".

- "Morgenstern" und "Abendstern" sind nie um Mitternacht zu sehen.
- Wenn der "Morgenstern" vor Sonnenaufgang am östlichen Himmel steht, wird es nach Sonnenuntergang keinen "Abendstern" geben.
-

- Der "Morgenstern" ist einige Monate lang zu sehen.
- Wenn der "Abendstern" nach Sonnenuntergang am westlichen Himmel steht, wird es vor Sonnenaufgang keinen "Morgenstern" geben.
- Der "Abendstern" ist einige Monate lang zu sehen.
- "Morgenstern" und "Abendstern" entfernen und nähern sich im Laufe einiger Monate der Sonne.
- Der die größten Winkel zwischen "Morgen-" bzw. "Abendstern" und der Sonne betragen stets etwa 47°, also ungefähr zweieinhalb Handbreiten, bei ausgestrecktem Arm und gespreizten Fingern.
- Sie "wandern" vor dem Hintergrund der (fest am Himmel stehenden) Fixsterne.
- Es gibt Zeiten, in denen es weder einen "Morgenstern" noch einen "Abendstern" gibt.
- "Morgenstern" und "Abendstern" sind, anders als andere Sterne, nicht an bestimmte Jahreszeiten gebunden.
- Zwischen Zeiten, in denen man den "Morgen-" oder "Abendstern" sehen kann, vergehen etwas mehr als 1 ½ Jahre, genau sind es 584 Tage.
- Der "Morgenstern" wird im Fernrohr von Tag zu Tag kleiner. Zunächst zeigt er sich als Sichel, dann als "Halbmond" und wird dann immer runder.
- Der "Abendstern" wird im Fernrohr von Tag zu Tag größer. Zunächst ist er nahezu rund, wird dann zum "Halbmond" und zeigt er sich schließlich als Sichel.

Den wenigsten Menschen ist bewusst, dass nicht nur die Sonne und der Mond auf- und untergehen, sondern auch die Planeten und Sterne. Und nur wenige Menschen werden an ihrem Lebensende sagen können, dass sie unseren Nachbarplaneten und ihre Bewegungen am Himmel mit eigenen Augen haben.

Eine gute Gelegenheit, die Bewegungen zu verfolgen sind Planetentreffen wie z.B. zwischen Venus und Jupiter. Kollisionen sind ausgeschlossen. Die Planeten bleiben auf ihren eigenen weit voneinander liegenden Bahnen und "treffen" sich nur, weil sie aus unserer Perspektive hintereinander stehen.

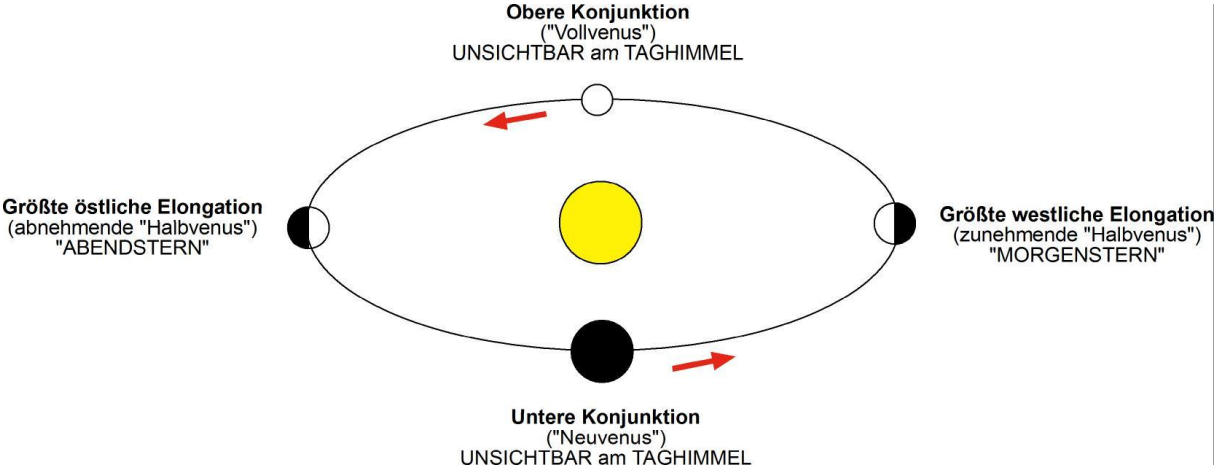
Venus und Jupiter
300615

Venus und Jupiter
010715

Fotos: Ingo Mennerich, Canon

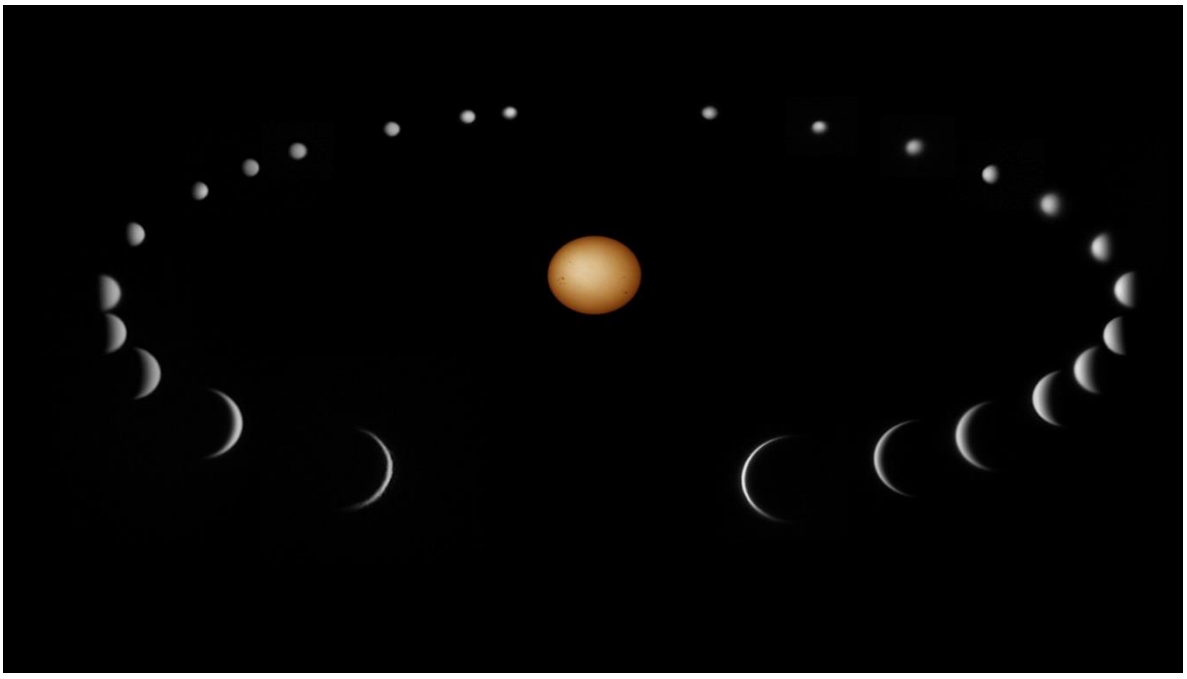
Die helle Venus zieht an der Wende Juni/Juli 2015 von rechts nach links am Jupiter vorbei. Die Venus ist zu dieser Zeit "Abendstern". Beide Planeten erscheinen in der Abenddämmerung und dominieren den Westhimmel bis spät in die Nacht hinein.

Beide Ausschnitte sind, da ohne Stativ, mit Normalobjektiv und mit Programmautomatik aufgenommen, nicht ganz scharf.



Die in östlicher Richtung schnell vor dem langsameren Jupiter vorbeiziehende Venus bewegt sich auf ihre größte östliche Elongation zu und befindet sich zwischen ihrer oberen Konjunktion mit der Sonne und der Phase der "abnehmenden Halbvenus". In dieser Phase bewegt sie sich auf uns zu, zunächst mit geringer, dann wachsender Geschwindigkeit relativ zu uns. Mit der Annäherung nimmt sie an Größe zu was man schon mit verhältnismäßig kleinen Fernrohren verfolgen kann.

Die tägliche Positionsveränderung am Himmel erreicht bei Konjunktion ein Maximum, sinkt bis zur größten Elongation um dann wieder dem Maximum zuzustreben.



Quelle: Dave Smith, www.insideastronomy.com

Diese in gleichen Zeitabständen aufgenommenen und zu einer Kollage zusammengefügten Bilder zeigen die Phasen der Venus und die Veränderung ihrer scheinbaren Größe. Zum Zeitpunkt der Konjunktionen ist die Venus unsichtbar.

Sichtbarkeitsfenster der Venus:
Elongation und Winkel der Ekliptik zum Horizont

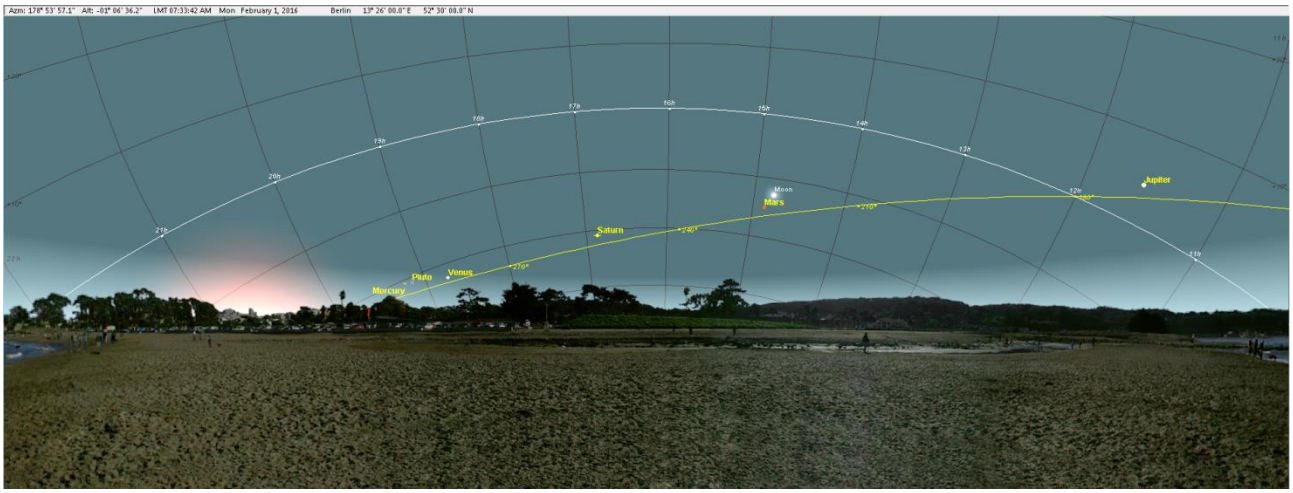
Die Planeten des Sonnensystems bewegen sich mehr oder weniger auf einer Ebene, der Ekliptik. Die Ekliptik ist der Pfad, den die Sonne im Laufe eines Jahres vor dem Hintergrund der Sterne zu durchlaufen scheint. Das ist nur eine Scheinbewegung: Sie kommt dadurch zustande, dass die Erde um die in Bezug auf das Sonnensystem still stehende Sonne kreist.

Die Planeten "wandern" von der Erde aus gesehen, mir geringen Abweichungen, entlang der Ekliptik. Wenn mehrere Planeten, etwa Venus, Mars, Jupiter und Saturn zugleich am Himmel zu sehen sind sieht man sie zu einer "Planetenparade" aufgereiht die sich vom östlichen zum westlichen Horizont spannt.

"Planetenparade" am Morgenhimmel des 31. Januars 2016:

Die beiden Abbildungen sind mit dem Programm "SkyGazer" erzeugte Artefakte. Sie zeigen den Mond und sechs in einem weiten, von Südost nach Südwest reichenden Bogen aufgereihten Planeten. Links sieht man den Schein der noch nicht aufgegangenen Sonne.

Der zweiten Abbildung wurde die Ekliptik (gelb), der Himmelsäquator (weiß) hinzugefügt. Entlang der Ekliptik stehen von links nach rechts Merkur, Pluto (unsichtbar), Venus, Saturn, Mars, der Mond und Jupiter.



Befinden sich die Planeten perspektivisch in Sonnennähe, werden sie in der Morgen- oder Abenddämmerung leicht vom Licht der Sonne überstrahlt. Mit geringerem Abstand zur Sonne verkürzt sich der Zeitraum, sie vor Sonnenaufgang bzw. nach Sonnenuntergang zu sehen. Die Länge der Sichtbarkeit ist also zunächst eine Frage der Elongation, des ekliptikalen Winkels zur Sonne.

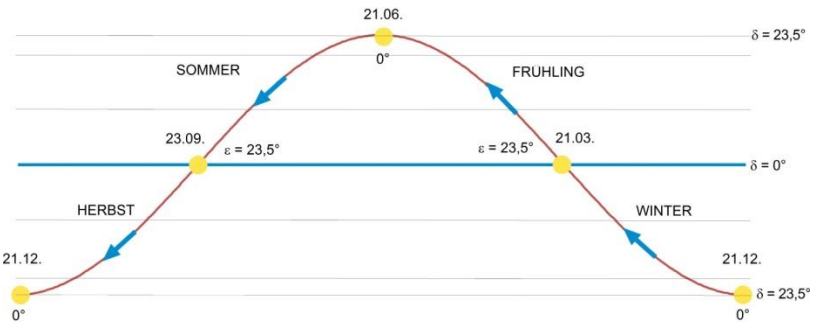
Maßgebend für die Morgen- bzw. Abendsichtbarkeit der sonnennahen Planeten ist auch der Winkel mit dem die Ekliptik den Horizont schneidet.

Einen Sonnenaufgang oder -untergang hat schon jeder erlebt. Wenige aber werden verfolgt haben, unter welchem Winkel die Sonne aus dem Horizont steigt bzw. in ihn eintaucht. Dieser Winkel ist an die geographische Breite des Ortes gebunden.

- Am Äquator geht die Sonne senkrecht auf und unter
- An den Polen beträgt der Steigungs- und Eintauchwinkel 0°
- An jedem anderen Ort ist er 90° - geographische Breite

In Hannover ist dieser Winkel also 90° - 52° = 38°, unabhängig von der Jahreszeit.

Das Bezugssystem der Ekliptik fällt nicht mit dem ins All projizierten Koordinationssystem der Erde zusammen. Die Ekliptik ist gegenüber dem Erdäquator um 23,5° geneigt, was bekanntermaßen zu den vier Jahreszeiten führt. Die Sonnenbahn beschreibt daher im Laufe des Jahres in Bezug auf das irdische Koordinatensystem eine "Sinuskurve" mit einem Minimum am 21.12 (Wintersonnenwende), einem Maximum am 21.06. (Sommersonnenwende) und zwei Nulldurchgängen am 21.03. und 23.09. (Frühlings- bzw. Herbst-Tag-und-Nachtgleiche).



Dabei pendelt sie um 67° um den hier als Gerade gezeichneten Himmelsäquator.

Der Winkel zwischen dem Himmelsäquator und der Ekliptik ist

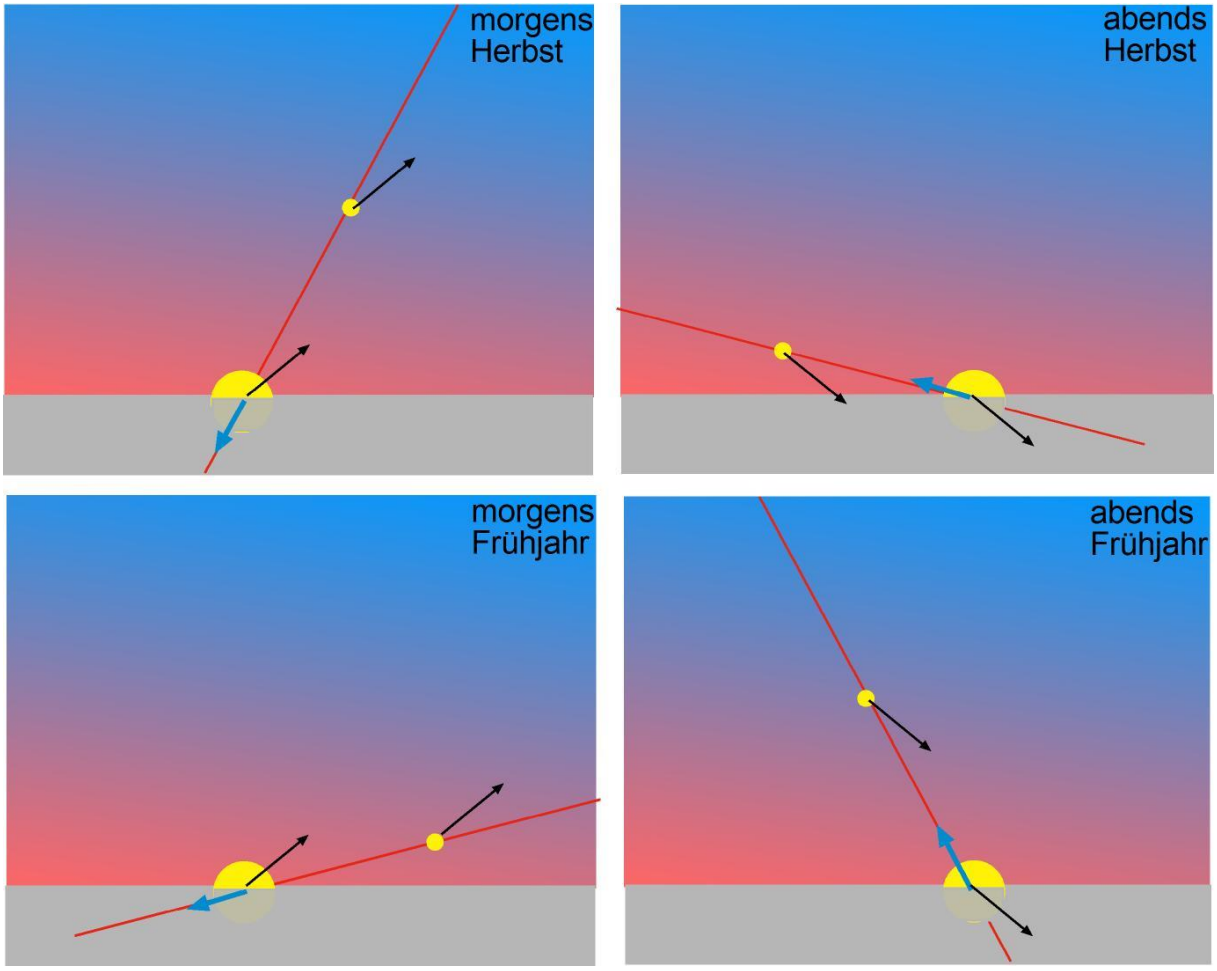
- gering im Winter und Sommer
- groß im Frühling und Herbst.

Entscheidend ist die Position des Planeten auf der Ekliptik

- Der "Morgenstern" steht stets westlich der Sonne ("links") und geht vor der Sonne auf.
- Der "Abendstern" steht stets östlich der Sonne ("rechts") und geht nach der Sonne unter.

Die folgenden vier Abbildungen zeigen die Lage der Ekliptik am bei auf- und untergehender Sonne im Frühling und im Herbst und den mit gleicher Elongation der Sonne vorauseilenden "Morgen-" bzw. ihr nachlaufenden "Abendstern".

Die Ekliptik ist als rote Linie dargestellt. Die schwarzen Pfeile zeigen den Aufgangs- bzw. Untergangswinkel bezogen auf den Horizont (Hannover 38°). Der blaue Pfeil gibt die scheinbare tägliche Bewegung der Sonne entlang der Ekliptik wieder.



Morgens im Herbst steigt die Ekliptik steil aus dem östlichen Horizont. Das begünstigt die Sichtbarkeit der sonnennahen Planeten in ihrer, der Sonne vorauseilenden "Morgenstern"-Phase.

Fällt die "Morgenstern"-Phase in den Winter und das Frühjahr, liegt die Ekliptik flacher über dem Horizont: Venus und Merkur erheben sich nur wenig über den Horizont.

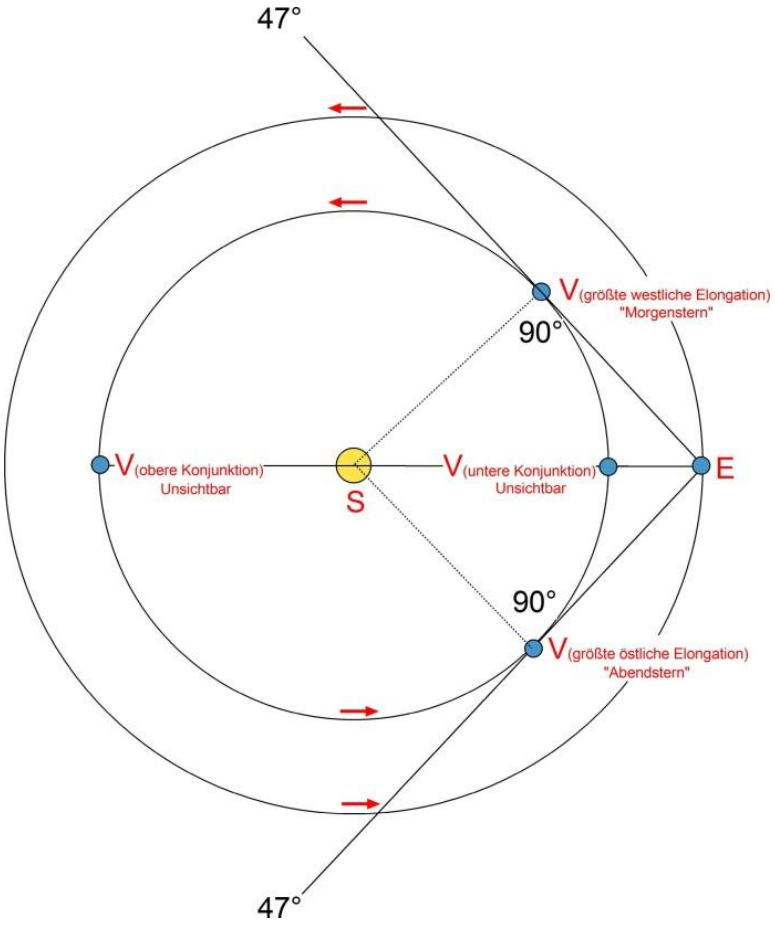
Umgekehrt sind Venus und Merkur als "Abendstern" im Frühjahr noch nach Sonnenuntergang zu sehen da die Ekliptik am Abend steil in den Horizont eintaucht. Als herbstliche "Abendsterne" liegen sie deutlich tiefer im Dunst des Horizonts.

Erschwerend oder begünstigend kommt hinzu, dass die Bahn der Venus um etwa 3 ½° und die des Merkur um etwa 7° gegen die Ekliptik geneigt ist.

Befinden sich die Planeten im oberen Scheitelpunkt, liegen sie über der Ekliptik und ihre Sichtbarkeit verlängert sich, im unteren Scheitelpunkt verkürzt sich die Sichtbarkeit. Das trifft besonders für den Merkur.

Fällt eine kurze maximale Elongation mit einer flach den Horizont kreuzenden Ekliptik und einer Position unterhalb der Ekliptik zusammen wird man ihn kaum beobachten können.

Die Phasen der Venus



In unterer Konjunktion ist die Venus nicht zu sehen ("Neuvenus", vor der Sonne)

In größter westlicher Elongation ist sie halb beleuchtet: "zunehmende Halbvenus", Morgenstern)

In oberer Konjunktion ist die Venus nicht zu sehen ("Vollvenus")

In größter östlicher Elongation ist sie halb beleuchtet: "abnehmende Halbvenus", Abendstern)

Maximale Elongation 47°

Entfernung Sonne-Erde = 1 AE

Der nahezu stabile Elongationswinkel deutet auf eine Umlaufbahn hin, die kaum von der Kreisform abweicht.

Wie weit ist die Venus von uns entfernt? Ein erster Ansatz

Die Venus erreicht als Morgen- oder Abendstern einen Winkel von bis zu 47° zur Sonne. Das kann man nachmessen, indem man den Abstand bei Auf- bzw. -untergang der Sonne mit der Hand misst. Die maximale Elongation beträgt also gut die Hälfte eines rechten Winkels.

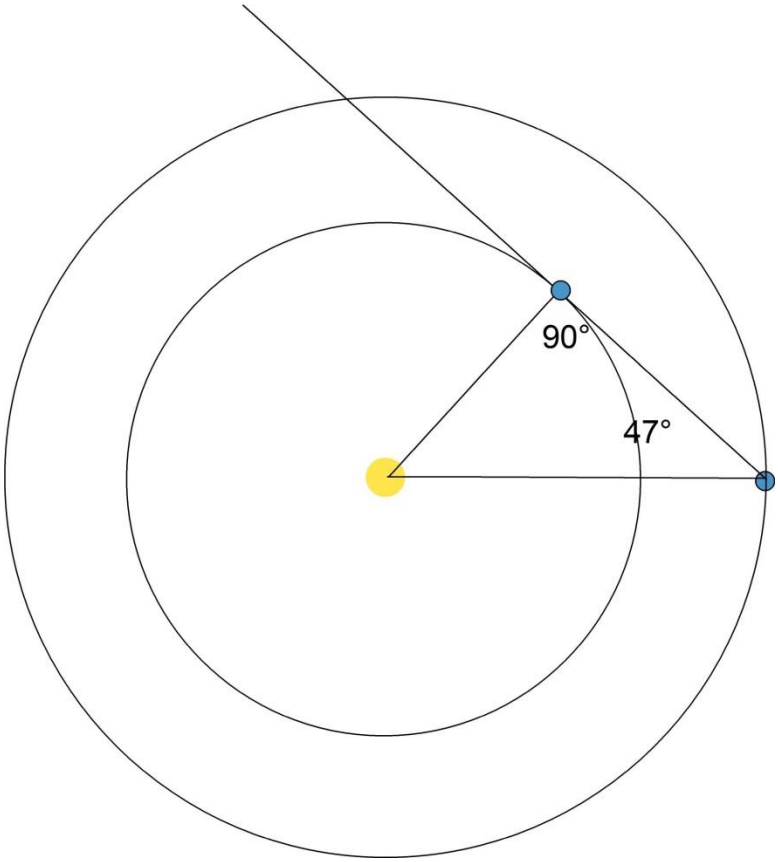
Auf der Grundlage des größtmöglichen Winkelabstands der Venus zur Sonne kann man mit Hilfe eines Zirkels und eines Geodreiecks eine erste Annäherung an das Entfernungsverhältnis Erde - Sonne herleiten.

Der Durchmesser der Sonne und ihre Distanz zur Erde sind noch unbekannte Größen. Eine kleine, aber nahe Sonne erscheint uns genau so groß wie eine ferne und große.

Die Distanz Erde - Sonne setzen wir gleich "Eins". Astronomen bezeichnen sie als Astronomische Einheit (AE=). Die genauere Bestimmung der Länge der AE folgt später.

In einem ersten Schritt wird die Distanz der Venus zur Sonne und zur Erde nur in AE ausgedrückt.

Entfernungsbestimmung Venus
Geometrische Lösung



- Schlage einen beliebig großen Kreis um die "Sonne".
- Zeichne die "Erde" auf an einen beliebigen Ort dieser "Umlaufbahn".
- Die Strecke zwischen Sonnen-mittel Erdmittelpunkt ist der Maßstab "1 AE".
- Trage im Erdmittelpunkt den Elongationswinkel (47°) ab.
- Zeichne die Umlaufbahn der Venus als inneren Kreis um die "Sonne". Der Kreis muss den Schenkel des Winkels berühren
- Der Schnittpunkt von Kreis und Tangente ist die Position der Venus. Die Tangente und die Strecke Sonne-Venus bilden einen rechten Winkel (90°)
- Miss die Distanz Sonne - Venus in Bruchteilen der AE

Die Venus ist 0,73 AE von der Sonne entfernt.

Rechnerische Lösung:

Die Strecken Erde - Venus und Venus - Sonne bilden die Ankathete und Gegenkathete eines rechtwinkligen Dreiecks. Die Hypotenuse ist die Strecke 1 AE. Das Verhältnis Hypotenuse/Gegenkathete ist der Sinus des (Elongations)Winkels.

$$\frac{r_{Sonne-Venus}}{r_{Sonne-Erde}} = sin47$$

$$r_{Sonne\text{-}Venus} = 1AE * \sin 47 = 0{,}73\ AE$$

Der Bahnradius der Venus beträgt das 0,73fache des Bahnradius der Erde.

Wann ist der Morgen- oder Abendstern das nächste Mal zu sehen?

- Eine der "Venus-Regeln" sagt, dass zwischen den Zeiten, in denen man den "Morgen-" oder "Abendstern" sehen kann, 1,6 Jahre (584 Tage oder etwas mehr als 19 Monate) vergehen.

Das kann mit Geduld und genauem Vermessen des Winkels zwischen Sonne und Venus beobachten.
Zwischen dem Erdenjahr und dieser Zeit gibt es einen einfachen Zusammenhang:
8 x 1 ist gleich 5 x 1,6. In Monaten ausgedrückt: 8 x 12 ist etwa gleich 5 x 19.

Die 365 Tage des Erdenjahres und die 584 Tage, nach denen sich eine bestimmte Venusphase wiederholt, bilden also (etwa) gemeinsame Vielfache nach 8, 16, 24 usw. Jahren.

Jahre	Tage	Tage zwischen gleichen Venusphasen	Anzahl gleicher Venusphasen
1	365	584	1
2	730	1168	2
3	1095	1752	3
4	1460	2336	4
5	1825	2920	5
6	2190	3504	6
7	2555	4088	7
8	2920	4672	8
9	3285	5256	9
10	3650	5840	10
11	4015	6424	11
12	4380	7008	12
13	4745	7592	13
14	5110	8176	14
15	5475	8760	15
16	5840	9344	16
17	6205	9928	17
18	6570	10512	18
19	6935	11096	19
20	7300	11680	20
21	7665	12264	21
22	8030	12848	22
23	8395	13432	23
24	8760	14016	24

Das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 365 und 584 kann auch man mit Hilfe der Primfaktorzerlegung bestimmen:

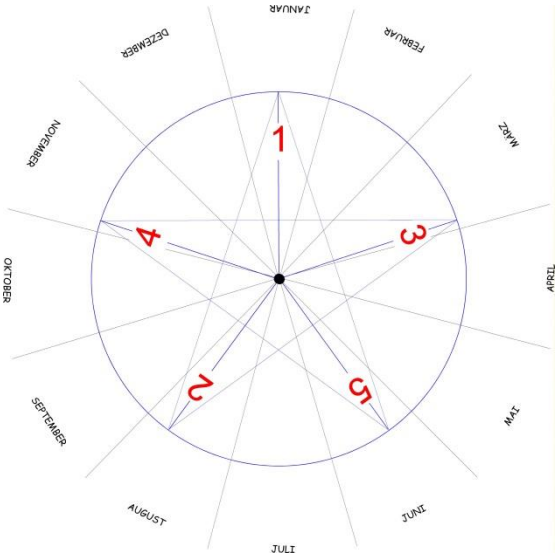
365		584	
5x	73	2x	292
		2x	146
		2x	73

Daraus folgt:

365	5^1*73	2920 : 365 = 8
584	2^3*73	
kgV (365, 584)=	2920	

Das heißt, wenn die Venus Mitte Januar 2017 das nächste Mal als "Abendstern" ihren größten Winkelabstand zur Sonne erreicht, wird sich das nach 8, 16, 24 usw. Jahren wiederholen. Wir wissen zwar nicht, was uns auf der Erde Anfang 2025 oder 2033 erwartet, können das Ereignis "Abendstern" bereits heute in den Kalender eintragen!

Aus diesen fast "magischen" Zahlenkombinationen kann man mit Zirkel, Geodreieck und Lineal ein kleines Instrument herstellen, mit Hilfe dessen wir die Zeitpunkte gleicher Venusphasen für die nächsten Jahre vorhersagen können.



So ist das "Venus-Pentagramm" zu benutzen:

- Venusphase* (1) und Monat durch Drehung beider Scheiben in Deckung bringen.
- Im abgebildeten Fall: Mitte Januar 2017 (Abendstern in größter östlicher Elongation).
- Dann mit dem Finger die Scheibe umrundend ein Jahr und sieben Monate verstreichen lassen.
- Die nächsten gleichartigen Venusphasen:
  - im August 2018 (2),
  - im März 2020 (3),
  - im November 2021 (4)
  - im Juni 2023 (5)
  - im Januar 2025 (1)

Das hält den von Astronomen errechneten "offiziellen" Daten durchaus stand:

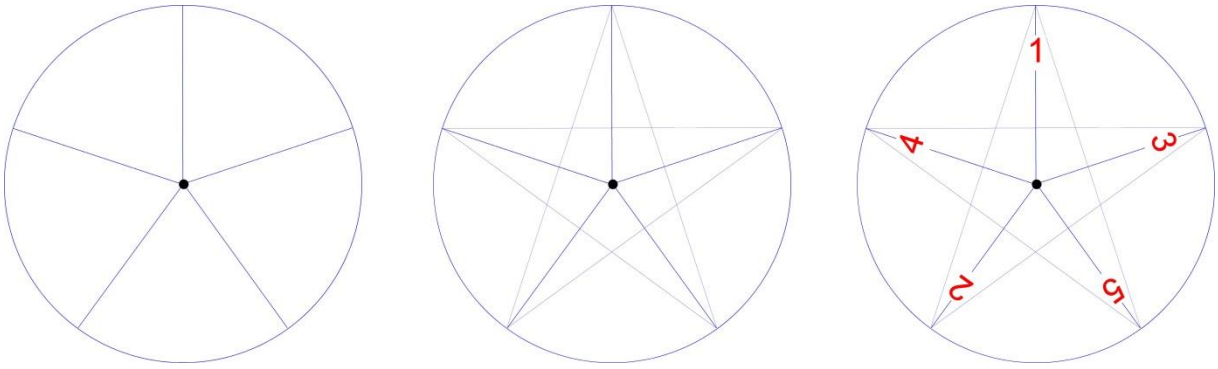
Maximale östliche Elongationen 2017 - 2025:

- 12.01. 2017, 16:12 GMT
- 17.08.2018 , 8:09 GMT
- 24.03. 2020 , 7:37 GMT
- 29.10. 2021 , 14:56 GMT
- 04.06. 2023 , 16:20 GMT
- 10.01. 2025 , 8:39 GMT

So stellst Du ein "Venus-Vorhersage-Pentagramm" selbst her:

- Zeichne mit dem Zirkel (oder mit Hilfe eines Tellers) einen großen Kreis.
- Teile den Kreis (360°) mit dem Geodreieck in 12 Monate auf.
- Ordne (im Uhrzeigersinn fortlaufend) jedem Sektor den entsprechend Monatsnamen zu

- Zeichne einen zweiten, kleineren Kreis
- Teile ihn in 5 gleiche Sektoren.
- Verbinde die Eckpunkte zu einem Pentagramm
- Nummeriere die Spitzen des Pentagramms nach dem unten abgebildeten Muster

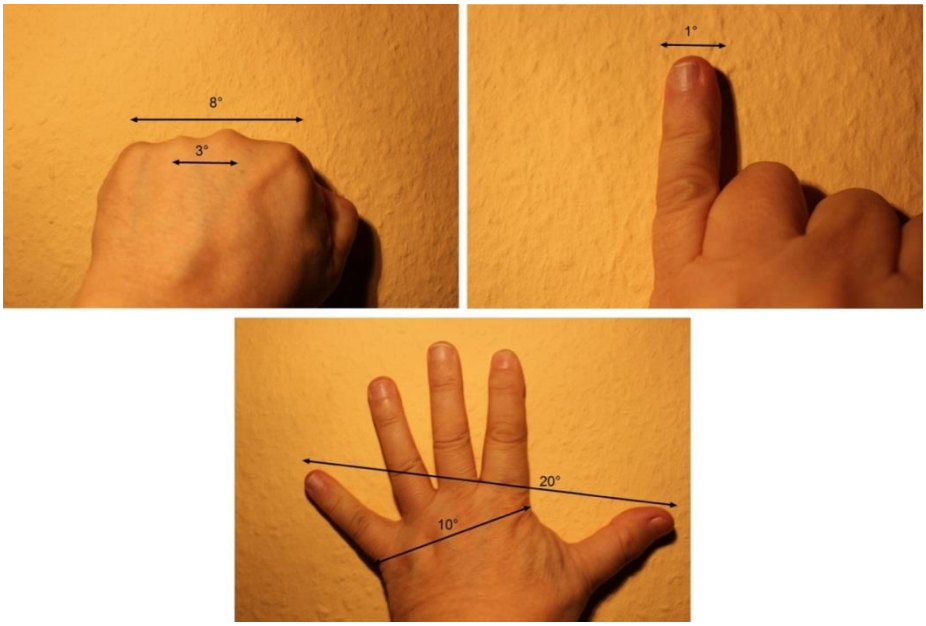


"Abstandsmessung" Sonne-Venus:
Wir nutzen unsere Hände als "Winkelmesser"

Wenn wir einen Arm ganz in Richtung auf das zu "vermessende" Objekt ausstrecken, können wir die Hand als groben "Winkelmesser" benutzen. Die "Gradeinteilung" kann man sogar selbst herausfinden:

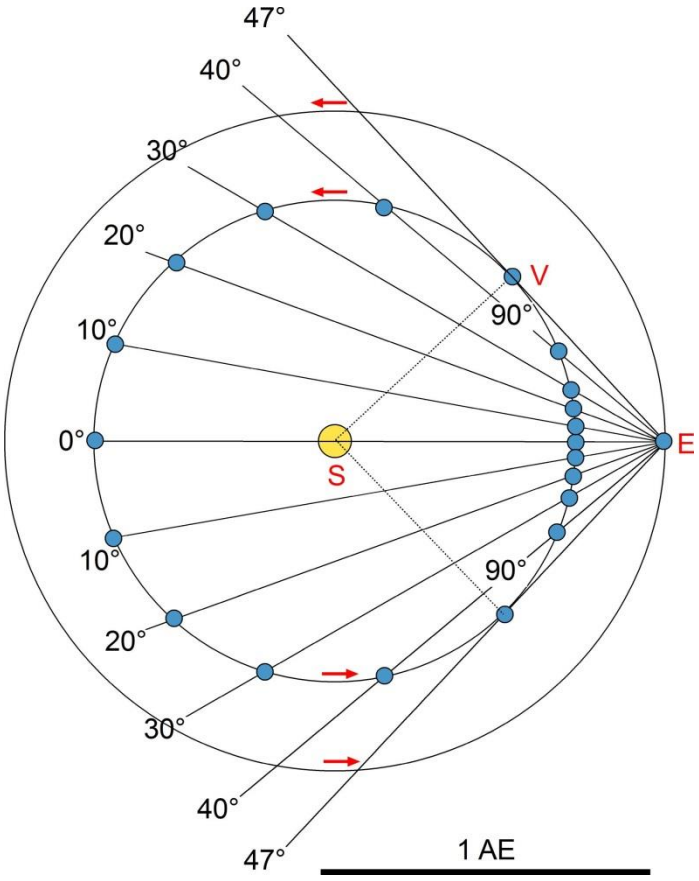
- Spreizen wir die Finger weit auseinander.
- Wie groß ist die Spanne zwischen Daumen und kleinem Finger?
- Wie oft können wir unsere Umwelt "zwischen die Finger" nehmen, wenn wir uns einmal vollständig um unsere Achse drehen?
- Dabei müssen wir aufpassen, dass sich die "Abschnitte" nicht überlappen.
- Je nach Armlänge und Handgröße wird man 16 - 20mal ansetzen müssen, im Schnitt etwa 18mal.
- Da ein Kreis 360° umfasst entspricht eine Handspanne etwa 20°

Mit diesem Wert kann man sich beim Ausmessen der eigenen Hand weitere "Maßstäbe" ausdenken:



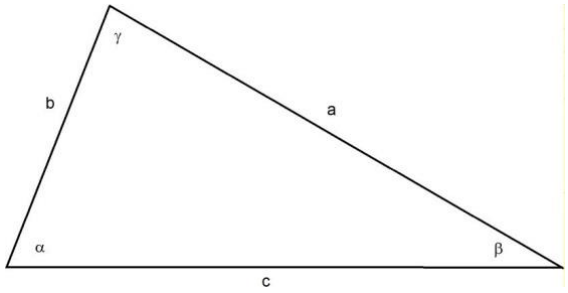
- Die Hand mit eingezogenem Daumen überdeckt etwa 10°
- Vom Knöchel des Zeigefingers zum Knöchel des kleinen Fingers sind es etwa 8°
- Zwischen den Fingerknöcheln liegen etwa 3°
- Der kleine Finger ist ungefähr 1° "dick".

Wie weit ist die Venus im Verhältnis zur Sonne von uns entfernt?



Rechnerische Lösung mit dem Sinussatz

Sinussatz:



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

oder

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

Das Verhältnis der drei Seiten zu den Sinuswerten der jeweils gegenüberliegenden Winkel ist gleich.

Aus dem aktuellen Elongationswinkel der Venus, d.h. dem Winkel zwischen der Sonne und der Venus lässt sich mit wenigen Schritten die Distanz $d_{Erde\text{-}Venus}$ ermitteln:

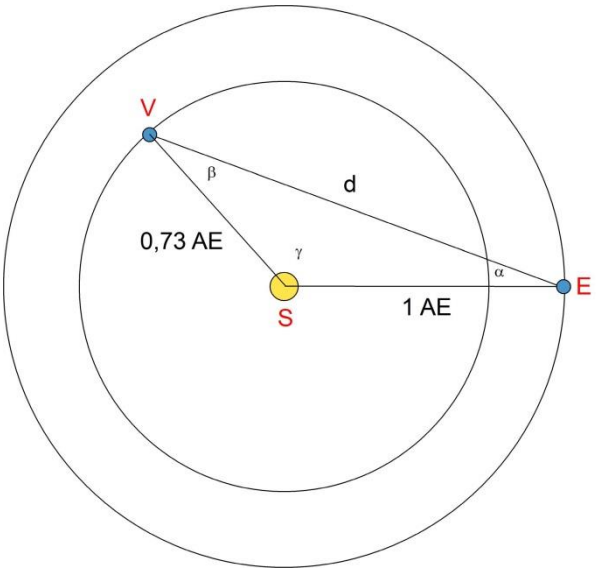
Bekannt sind:

- der Elongationswinkel α
- die Entfernung Sonne - Erde (1 AE)
- die Entfernung Sonne - Venus (0,73 AE)

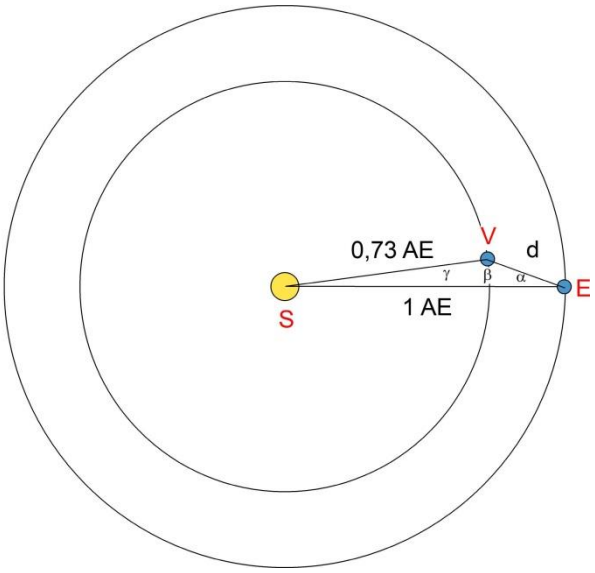
Daraus lassen sich die Winkel β und γ und die fehlende Seite d errechnen:

(Hier am Beispiel von a = 20°)

Achtung: Es gibt bei gleichem Elongationswinkel zwei mögliche Positionen Erde-Venus.



Winkel zwischen Sonne und Venus wird geringer: Venus nähert sich oberer Konjunktion und größter Erdentfernung.



Winkel zwischen Sonne und Venus wird größer: Venus kurz nach unterer Konjunktion und geringster Erdentfernung.

$$\frac{0{,}73\text{AE}}{\sin\alpha} = \frac{1\text{AE}}{\sin\beta}$$

$$\sin\beta = \frac{1\text{AE}*\sin\alpha}{0{,}73\text{AE}}$$

Winkel α = 20°

$$\sin\beta = 0{,}46852..$$

Wenn ß ⟶ spitzer Winkel (< 90°), dann

$$\sin\beta = 27{,}9°$$

$$\gamma = 180° - 20° - 27{,}9° = 132{,}1°$$

Daraus folgt für die Distanz $d_{\text{Erde-Venus}}$:

$$\frac{\text{d}}{\sin\gamma} = \frac{0{,}73\text{AE}}{\sin\alpha}$$

$$\text{d} = \frac{0{,}73\text{AE}*\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$$\text{d} = 1{,}58\text{AE}$$

Wenn ß → stumpfer Winkel (> 90°), dann

$$\sin\beta = 180 - 27{,}9° = 152{,}1°$$

$$\gamma = 180° - 152{,}1° - 20° = 7{,}9°$$

Daraus folgt für die Distanz $d_{Erde\text{-}Venus}$:

$$\frac{d}{\sin\gamma} = \frac{0{,}73\text{AE}}{\sin\alpha}$$

$$d = \frac{0{,}73\text{AE}*\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

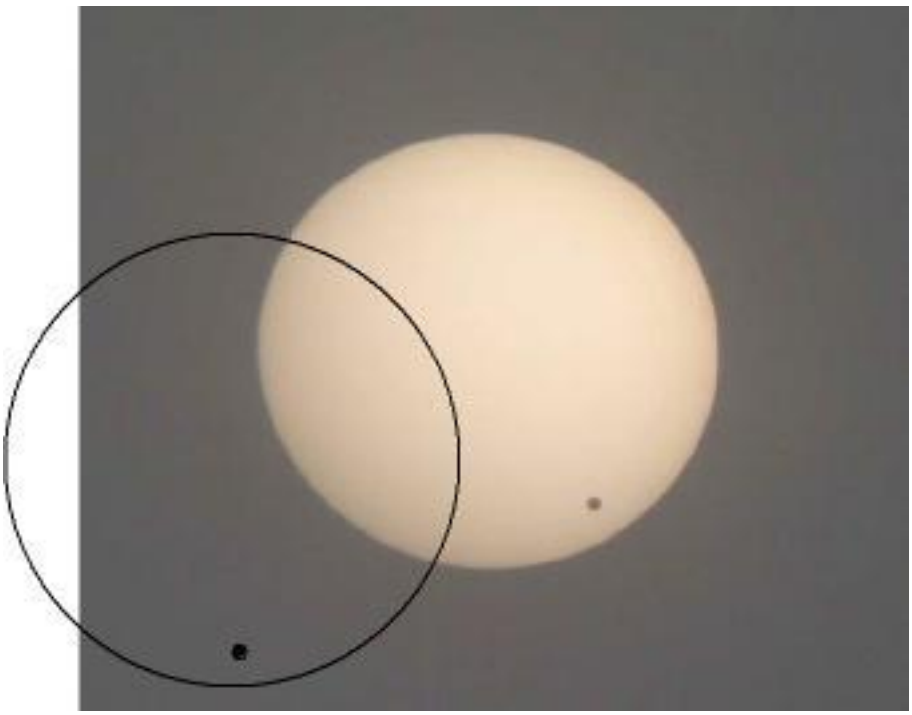
$$d = 0{,}29\text{AE}$$

Wie groß ist die Venus?

Wenn die Venus die Erde überholt und auf einer Ebene zwischen Erde und Sonne liegt kommt es zu einer "Venusfinsternis". Bei einem solchen (seltenen) Venustransit wandert die Venus innerhalb weniger Stunden als schwarzer Lichtpunkt von links nach rechts über die Sonnenscheibe.
Die Sonnenscheibe erscheint dabei etwa 30mal so groß wie die der Venus.

Der "kleine Unterschied":

Während sich der der Mond bei einer Sonnenfinsternis von West (rechts) nach Ost (links) vor die Sonne schiebt zieht die Venus oder der Merkur bei einem Transit entsprechend ihrer gegen den Uhrzeiger gerichteten Bewegung von Ost nach West. Während des Transits, der ja nur ein besonderer Fall der unteren Konjunktion darstellt gehen sie von ihrer "Abendstern-" in ihre "Morgenstern-Phase" über.



Mit dem Sextanten ermittelte scheinbare Größe der Sonne → 30 Bogenminuten (30´)

Durch Ausmessen des Fotos ermittelte scheinbare Größe der Venus → 1 Bogenminute (1´)

Die Entfernung der Sonne ist 1 AE, die der Venus 1 AE - 0,73 AE = 0,27AE.

Die Radien der Sonne und der Venus verhalten sich wie

$\tan\alpha/2_{Sonne}$/1AE = tan0,25*1AE = 0,0044

$\tan\alpha/2_{Venus}$/0,27AE = tan0,0083*0,27AE = 0,000041

$$\frac{0{,}0044}{0{,}000041} = 107{,}3$$

Damit wäre der Radius bzw. der Durchmesser der Sonne etwa 107mal so groß wie der der Venus.

Die tatsächlichen Werte (die aber noch mit einer anderen Methode zu bestimmen sind) lauten:

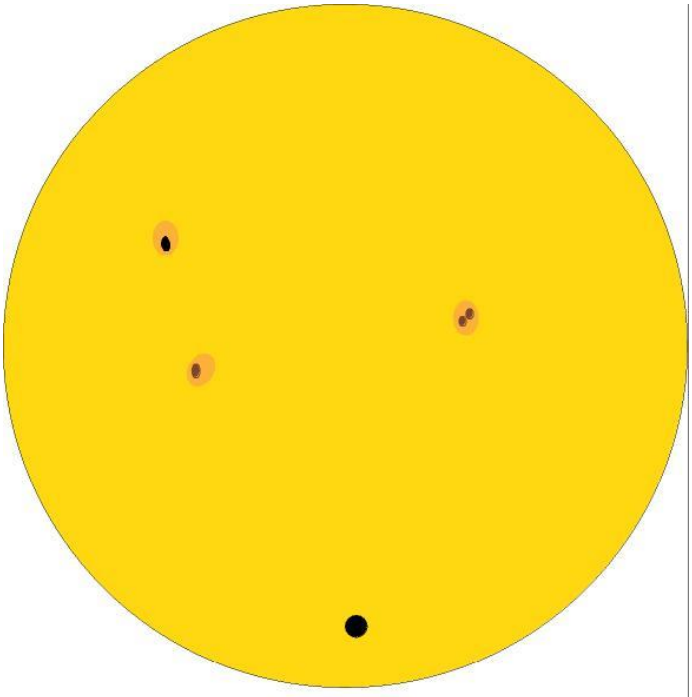
d_{Sonne}= 1392000 km

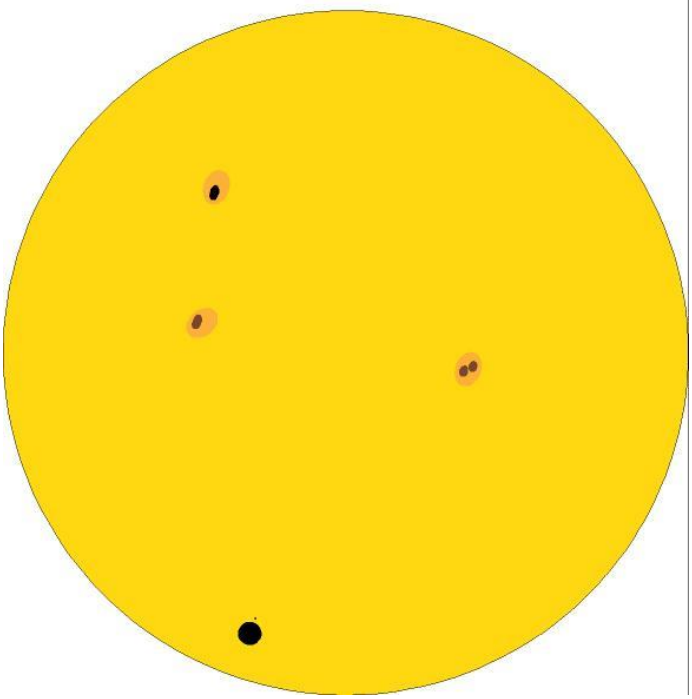
d_{Venus}= 12104 km

Damit ist der Quotient

$$\frac{1392000km}{12104km} = 115$$

Wie groß und wie weit entfernt sind Sonne und Venus?





Die beiden "Aufnahmen" wurden während eines Venustransits gleichzeitig in London bzw. Kapstadt gemacht.
Sie unterscheiden sich geringfügig.

Der schwarze Fleck unten ist die vor der Sonne vorbeiziehende Venus.

Die scheinbare Größe der Sonne auf der Erde beträgt 0,5° (30 Bogenminuten, 30´)

- Bestimme die scheinbare Größe der Venus in Grad (°).

- Lege beide Aufnahmen übereinander und drehe sie so, dass die Sonnenflecken genau aufeinander liegen.

- Wie weit weichen die Positionen der Venus auf den beiden Bildern voneinander ab?

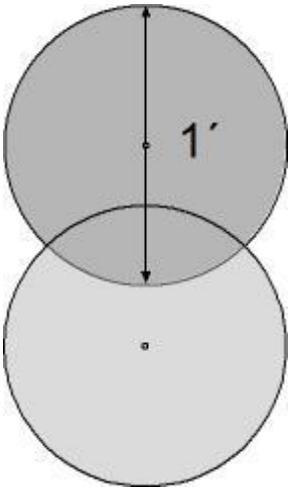
- Überlege, welche Aufnahme in London und welche in Kapstadt gemacht wurde.

Aus der Differenz der scheinbaren Venusposition, zeitgleich gemessen an zwei Orten mit bekannter Entfernung lässt sich mit Hilfe der Geometrie bestimmen,

- wie weit die Venus beim von uns entfernt ist
- wie groß der Radius ihrer Umlaufbahn ist
- wie weit die Sonne von uns entfernt ist
- wie groß die Sonne ist
- wie groß die Venus ist

Versuche dir, eine Methode zur Größen und Entfernungsbestimmung auszudenken!

Wie weit ist die Venus wirklich entfernt?



- Kennt man die Größe der Venus, kann man damit die Größe der Sonne bestimmen
- Kennt man die Größe der Sonne, kann man damit die Größe der Venus bestimmen
- Kennt man die Größen der Venus und der Sonne, kann man ihre Entfernungen bestimmen.

Bei einem Venustransit wurde festgestellt, dass die Positionen der Venus in London bzw. im 8500 km entfernten Kapstadt um etwa 3/4 Bogenminuten, also um etwa 45´´ (Bogensekunden) verschoben erscheinen.
α = 45´´ = 0,0125°

Entfernung Erde - Venus:

$$D_{Erde-Venus} = \frac{(D_{London-Kapstadt})/2}{\tan(\alpha/2)}$$

$$D_{Erde-Venus} = \frac{8500km/2}{\tan(0{,}0125/2)}$$

$$D_{Erde-Venus} = \frac{4250km}{0{,}0001091} = 38955087$$

$$D_{Erde-Venus} \approx 39\ Millionen\ km$$

Die tatsächliche Distanz bei einem Venustransit: 40,66 Mill.km

Daraus resultierende Venus-Parallaxe $\alpha_{\text{London-Kapstadt}}$ beträgt damit:

$$\tan\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{4250km}{40660000km} = 0{,}000104525$$

$\alpha/2$ = 0,00598886° = 21´´56

α = 0,011977721° = 43´´12

Daraus folgt

$$D_{Erde-Venus} = \frac{4250km}{0{,}000104525} = 40{,}66\ Mill.km$$

Wie weit ist die Sonne von uns entfernt?
Die Länge der "Astronomischen Einheit"

Die $\text{Distanz}_{\text{Erde-Sonne}}$ haben wir zunächst mit 1 AE angegeben.

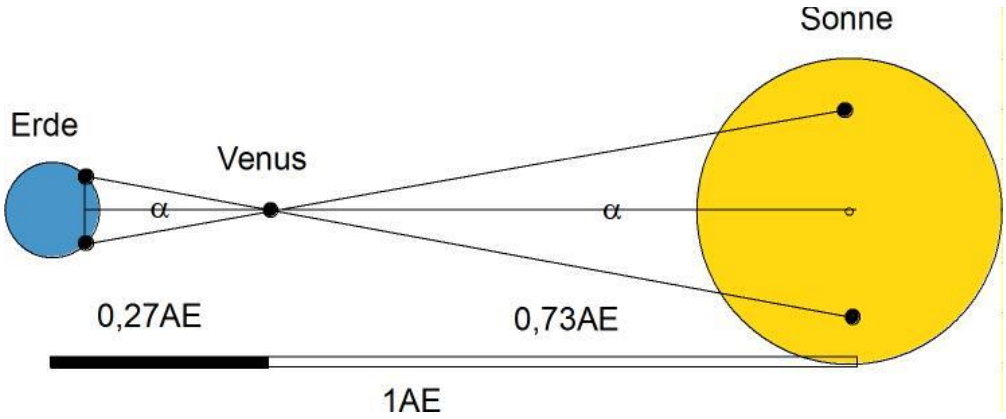
Da die Venus die Sonne in 0,73 AE Entfernung umkreist ist die $\text{Distanz}_{\text{Erde-Venus}}$ 0,27AE.

Daraus folgt (nach unserer ersten Annäherung)

$$D_{Erde-Sonne} = \frac{39\ Mill.km}{0{,}27\text{AE}} = 144{,}4\ Mill.km$$

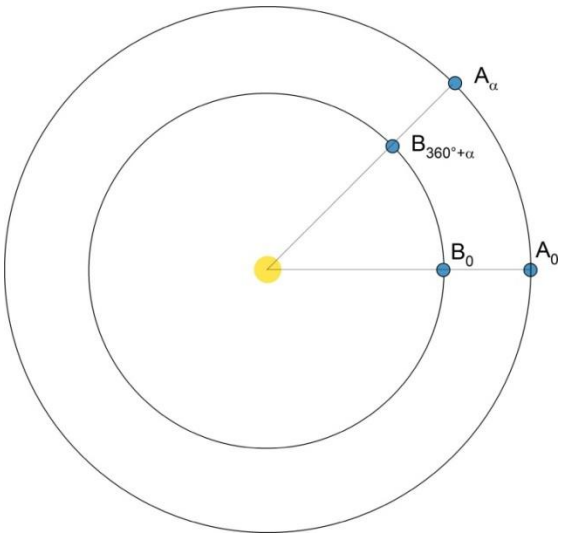
und genauer

$$D_{Erde-Sonne} = \frac{40{,}66\ Mill.km}{0{,}27\text{AE}} = 150{,}6\ Mill.km$$



Nicht maßstabsgerechte Zeichnung!

Wie lange braucht die Venus, um die Sonne einmal vollständig zu umkreisen?



Die Planeten A und B umkreisen einen Stern entgegen dem Uhrzeiger. A umkreist den Stern auf der äußeren, B auf der inneren Bahn.
In einem bestimmten Zeitintervall t bilden A und B jeweils eine Linie mit der Sonne.

Aus der Perspektive von B steht A dem Stern dann genau gegenüber, d.h.in **Opposition** zum Stern. Aus der Perspektive von A steht B vor dem Stern oder zwischen A und dem Stern. B steht jetzt in **unterer Konjunktion** zum Stern. Die "obere Konjunktion" tritt ein, wenn B aus der Perspektive von A hinter dem Stern steht.

Zwischen zwei Oppositionen bzw. unteren Konjunktionen hat sich Planet A auf seiner Kreisbahn in diesem Zeitintervall t um den Winkel α_A bewegt.

Planet B hat in der Zeit t eine ganze Umrundung (360°) und zusätzlich den Winkel α_A überstrichen, also insgesamt einen Winkel von α_B =360°+α_A.

Das Verhältnis zwischen der synodischen Umlaufzeit T_{syn} und der siderischen Umlaufzeit T_{sid} entspricht dem Verhältnis der überstrichenen Winkel.

$$\frac{\alpha_B}{360°} = \frac{T_{syn}}{T_{sid_B}} \text{ und } \frac{\alpha_A}{360°} = \frac{T_{syn}}{T_{sid_A}}$$

$$\alpha_B = \alpha_A + 360°$$

Daraus folgt

$$\frac{T_{syn}}{T_{sid_B}} * 360° = \frac{T_{syn}}{T_{sid_A}} * 360° + 360°$$

Dividiert durch 360° und T_{syn} erhalten wir

$$\frac{1}{T_{sid_B}} = \frac{1}{T_{sid_A}} + \frac{1}{T_{syn}}$$

oder

$$\frac{1}{T_{sid_A}} = \frac{1}{T_{sid_B}} - \frac{1}{T_{syn}}$$

Im Beispiel ist der äußere Planet A die Erde, und B die Venus.

Die siderische Umlaufzeit der Venus, also das Überstreichen eines vollständigen Kreises von 360° errechnet sich daher nach der Formel

$$\frac{1}{T_{sid_{Venus}}} = \frac{1}{T_{sid_{Erde}}} + \frac{1}{T_{syn}}$$

Untere Konjunktionen Sonne-Venus 2010 - 2015

29.10.2010
06.06. 2012
11.01.2014
15.08.2015

Synodische Umlaufzeit der Venus: (Zeit die aus der Erdperspektive zwischen zwei oberen bzw. unteren Konjunktionen, oder zwei östlichen bzw. westlichen Elongationen vergeht).

$T_{syn} \approx 584$ Tage (genau: 583,92d)

Umrechnung synodische Umlaufzeit des Planeten in siderische Umlaufzeit:

$$\frac{1}{T_{sid_{Venus}}} = \frac{1}{T_{sid_{Erde}}} + \frac{1}{T_{syn}}$$

$$\frac{1}{T_{sid_{Venus}}} = \frac{1}{365d} + \frac{1}{584d} = 225d$$

Die siderische Umlaufzeit der Venus beträgt also 225 Tage

In welchem Verhältnis stehen die Entfernungen und Umlaufzeiten zweier Planeten?

Erde und Venus umkreisen die Sonne.

- die Erde auf der äußeren Bahn in einem Abstand von etwa 150 Millionen Kilometern
- die Venus auf der inneren Bahn in einem Abstand von etwa 108 Millionen Kilometer.
- die Erde in 365 Tagen
- die Venus in etwa 225 Tagen

Drittes Keplersches Gesetz:

Kepler fand das Gesetz wohl nicht durch theoretische Überlegungen, sondern durch "Ausprobieren". Er war, wie vor 400 Jahren viele seiner Zeitgenossen, davon überzeugt, dass die Naturgesetze in einem harmonischen ("schönen" oder "göttlichen") Zusammenhang stehen.

- Ist es denkbar, dass ein Schüler, ausgestattet mit den vier Zahlen durch bloßes Herumspielen auf dem Taschenrechner das 3. Keplersche Gesetz neu "erfindet"?
- Deutlich ist auf den ersten Blick, dass ein größerer Bahnradius eine größere Umlaufzeit zur Folge hat.
- Bahnradien mit Umlaufzeiten scheinen in einem proportionalen Verhältnis zu stehen.

Wenn man im Unterricht die Devise ausgäbe, dass man mit einem einfachen (!) Taschenrechner durch Probieren auf die Lösung kommen kann und vielleicht einen Preis dafür auslobt…?

Durch Potenzieren der Quotienten erhalten wir folgende Ergebnisse:	$\frac{365}{225} \approx 1{,}62$ $\left(\frac{365}{225}\right)^2 \approx 2{,}63$ $\left(\frac{365}{225}\right)^3 \approx 4{,}27$ $\left(\frac{365}{225}\right)^4 \approx 6{,}93$	$\frac{150}{108} \approx 1{,}39$ $\left(\frac{150}{108}\right)^2 \approx 1{,}93$ $\left(\frac{150}{108}\right)^3 \approx 2{,}68$ $\left(\frac{150}{108}\right)^4 \approx 3{,}72$
Die Wurzeln der Quotienten ergeben folgende Ergebnisse:	$\sqrt[2]{\frac{365}{225}} \approx 1{,}27$ $\sqrt[3]{\frac{365}{225}} \approx 1{,}17$	$\sqrt[2]{\frac{150}{108}} \approx 1{,}18$ $\sqrt[3]{\frac{150}{108}} \approx 1{,}12$

Kepler fand (ohne Taschenrechner) heraus:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$

Die Quadrate der Umlaufzeiten T zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer großen Halbachsen a.

$$\frac{{T_E}^2}{{T_V}^2} = \frac{{a_E}^3}{{a_V}^3}$$

Eingesetzt in die Formel:

$$\frac{365^2}{225^2} = \frac{150^3}{108^3} \approx 2{,}6$$

Die Quotienten stimmen nicht genau überein was dem Auf- und Abrunden der "exakten" Werte geschuldet ist. Hier geht es nur darum, die Zusammenhänge zu erläutern.

Mit genaueren Werten gerechnet:

$$\left(\frac{365{,}26\ Tage}{224{,}7\ Tage}\right)^2 \approx \left(\frac{149{,}6\ Mill.\,km}{108{,}16\ Mill.\,km}\right)^3 \approx 2{,}64\ \ldots$$

$$\sqrt[3]{\frac{365{,}26\ Tage}{224{,}7\ Tage}} \approx \sqrt[2]{\frac{149{,}6\ Mill.\,km}{108{,}16\ Mill.\,km}} \approx 1{,}176\ \ldots$$

Die Newton´sche Herleitung des Kepler´schen Gesetzes

Johannes Kepler (1571 - 1630) mag sein Gesetz im Glauben gefunden haben, dass die Welt nach harmonischen Prinzipien aufgebaut sei.
Und in der Tat: An dieser einfachen Beziehung zwischen den Umlaufzeiten und den Radien der Kreisbahnen haftet etwas "Schönes", vielleicht "Göttliches".

Isaac Newton (1643 - 1727) verknüpfte das dritte Keplersche Gesetz mit dem von ihm gefundene Gravitationsgesetz und gab ihm damit eine nachprüfbare physikalische Grundlage.

Newton erkannte

- dass die "Anziehungs-" oder Gravitationskraft mit den Massen der beiden, einander anziehenden Körper wächst.
- dass diese Kraft mit dem quadratischen Abstand abnimmt.

$$F_G = G * \frac{M * m}{r^2}$$

- mit der Gravitationskraft F_G, der Gravitationskonstanten *G*, den Massen *M* und *m*, sowie der Distanz *r* zwischen den Schwerpunkten der beiden Massen.

Dass diese Kraft gleichermaßen zwischen beiden Massen wirkt, scheint auf der Erde jeder Alltagserfahrung zu wiedersprechen. Alles, vom Container bis zur Bettfeder wird von der Erde angezogen und fällt auf sie zu. Die Erde selbst steht still, obwohl auf sie dieselbe Kraft wirkt, die das Herabfallen von Objekten bewirkt. Der Grund ist die "Trägheit", das von der Masse abhängige Beharren, die Bewegungsrichtung und -geschwindigkeit beizubehalten, was sich als Analogie mit zwei ungleich schweren Magneten leicht zeigen lässt.

Die Kraft, die eine um ein großes Massezentrum *M* kreisende kleine Masse *m* auf ihrer Umlaufbahn hält ist die Zentripetalkraft F_Z

Diese Kraft hängt von der Masse des kreisenden Köpers *m*, der (quadratischen) Geschwindigkeit *v* und der Distanz zum Schwerpunkt der großen Masse *M* ab.

$$F_Z = m * \frac{v^2}{r}$$

Die Zentripetalkraft, auch Radialkraft genannt, ist erfahrbar, wenn man einen Ball an einer Schnur um sich kreisen lässt. Der Zug, der vom kreisenden Objekt ausgeübt wird, ist abhängig von seiner Masse, seiner

Kreisgeschwindigkeit und von der Länge der Schnur. Je länger die Schnur, desto länger die bei gleicher Masse und Geschwindigkeit überstrichene Kreisbahn.

Nur wenn F_G und F_Z gleich sind kreist ein Körper um einen anderen. Überwiegt die eine ünber die andere Kraft, nähern sich die Körper einander an oder entfernen sich voneinander.

Daraus folgt

$$F_G = F_Z$$

Für einen waagerecht geworfenen Ball gilt bei gleichbleibenden Kräften:

- Ist $F_G > F_Z$, fällt er nach einer bestimmten Zeit zu Boden (Normalfall).
- Ist $F_G = F_Z$, umkreist er die Erde wie ein Satellit.
- Ist $F_G < F_Z$, verlässt er die Erde (Raumschiff).

Wenn man die Formeln der Gravitationskraft und der Zentripetalkraft gleichsetzt erhält man

$$F_G = F_Z$$

$$G * \frac{M * m}{r^2} = m * \frac{v^2}{r}$$

Teilt man beide Seiten durch *m*, reduziert sich die Gleichung auf

$$G * \frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{r}$$

Die Masse der Planeten *m* kürzt sich also heraus was bedeutet, dass diese bei der weiteren Berechnung nicht mehr berücksichtigt werden müssen.

Die Geschwindigkeit *v* und die Umlaufzeit *T* verhalten sich wie

$$v = \frac{2 * \pi * r}{T}$$

$2\pi r$ ist der Kreisumfang und T die Umlaufzeit (Periode)

Daraus folgt

$$v^2 = \frac{4 * \pi^2 * r^2}{T^2}$$

und (eingesetzt)

$$G * \frac{M}{r^2} = \frac{\frac{4 * \pi^2 * r^2}{T^2}}{r}$$

$$G * \frac{M}{r^2} = \frac{4 * \pi^2 * r^2}{r * T^2}$$

$$G * M = \frac{4 * \pi^2 * r^3}{T^2}$$

$$\frac{G * M}{4 * \pi^2} = \frac{r^3}{T^2}$$

Die linke Seite der Gleichung, bestehend aus der Masse des Zentralkörpers *M*, der Gravitationskonstante G und 4π ist eine, von der Masse *M* abhängige Konstante.

Im Falle des Sonnensystems ist M die Sonne. Dann gilt für alle sie umkreisenden Planeten

$$\frac{r^3}{T^2} = konstant! \quad \text{Oder} \quad \frac{T^2}{r^3} = konstant!$$

Beim Dritten Keplerschen Gesetz ist *C* die so genannte, für jedes "Sonnensystem" verschiedene "Kepler-Konstante".

Vergleicht man die Umlaufzeit und den Bahnradius eines Planeten, so muss der Quotient aus dem Quadrat von *T* und der dritten Potenz von *r* stets die entsprechende "Kepler-Konstante" *C* ergeben.

Für die Sonne als Zentralkörper gilt C_{Sonne} = 2,97

Ermittelt am Beispiel der Venus und der Erde

Achtung:

Die Umlaufzeiten *T* müssen in Sekunden (s) und die Radien in Meter (m) umgewandelt werden

$$Venus \Rightarrow \frac{(224{,}701d * 86400s)^2}{(108{,}16 * 10^9 m)^3} = 2{,}97 * 10^{-19}$$

$$Erde \Rightarrow \frac{(365{,}25d * 86400s)^2}{(149{,}6 * 10^9 m)^3} = 2{,}97 * 10^{-19}$$

Mit Hilfe dieser Konstanten lässt sich aus der synodischen Umlaufzeit eines Planeten seine Distanz zur Sonne bestimmen, hier zum Beispiel für die Venus:

Aus der Zeitspanne von etwa 584 Tagen zwischen zwei oberen bzw. unteren Konjunktionen oder zwei östlichen bzw. westlichen Elongationen erhalten wir zunächst die siderische Umlaufzeit von etwa 225 Tagen:

$$\frac{1}{T_{sid_{Venus}}} = \frac{1}{365d} + \frac{1}{584d} = 225d$$

$$225\,Tage = 225d * 86400s = 19440000s$$

$$\frac{T^2}{r^3} = C_{Sonne} \Rightarrow r^3 = \frac{T^2}{C_{Sonne}} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{C_{Sonne}}}$$

$$r_{Venus} = \sqrt[3]{\frac{(225d*86400s)^2}{2{,}97*10^{-19}}} = 1{,}0836 * 10^{11} m = 108{,}36\ Mill.km$$

Merkur, der "schnelle" Bruder des "Morgen-" oder "Abendsterns"

Wer sich darauf einlässt, die Venus länger zu beobachten, wird in regelmäßigen Abständen einen zweiten "Stern" bemerken, der sich ähnlich wie die Venus verhält. Auch er tritt entweder als "Morgen-" oder als "Abendstern" auf. Von der Venus unterscheidet er sich durch:

- Geringere maximale Abstände zur Sonne (Elongationen)
- Geringere Helligkeit
- Deutlich kürzere Sichtbarkeit als "Morgen-" oder "Abendstern"
- Deutlich schnellerer Phasenwechsel zwischen "Morgen-" oder "Abendstern"

Der Legende nach soll Nikolaus Kopernikus, dem man die Entdeckung des heliozentrischen Weltbildes zuschreibt auf seinem Sterbebett bedauert haben, diesen schnellen Bruder der Venus nie gesehen zu haben. Das könnte er mit der überwiegenden Zahl der heute auf der Erde lebenden Menschen gemeinsam haben. Dabei war Kopernikus der Merkur - und darum handelt es sich ja - durchaus bekannt und er konnte ihm aus den Beobachtungen anderer Astronomen die Rolle des innersten Planeten zuschreiben.

Warum Kopernikus der Blick auf den Merkur vorbehalten blieb wird unterschiedlich dargestellt.

Fest steht: Merkur ist nur für diejenigen sichtbar, entweder sehr viel Geduld haben oder die schon im Voraus wissen, wann und wo sie ihn sehen werden.

Gleiche Phasen wiederholen sich nach etwa 116 Tagen, also etwas weniger als 4 Monaten.

Das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 365 und 116, ermittelt durch Primfaktorzerlegung:

365		116	
5x	73	2x	58
		2x	29

Daraus folgt:

365	5^1*73
116	2^2*29
kgV (365, 116)=	42340

42340 : 365 = 116

Das heißt, erst nach 116 Jahren kann man Merkur zur gleichen Zeit in gleicher Position sehen.

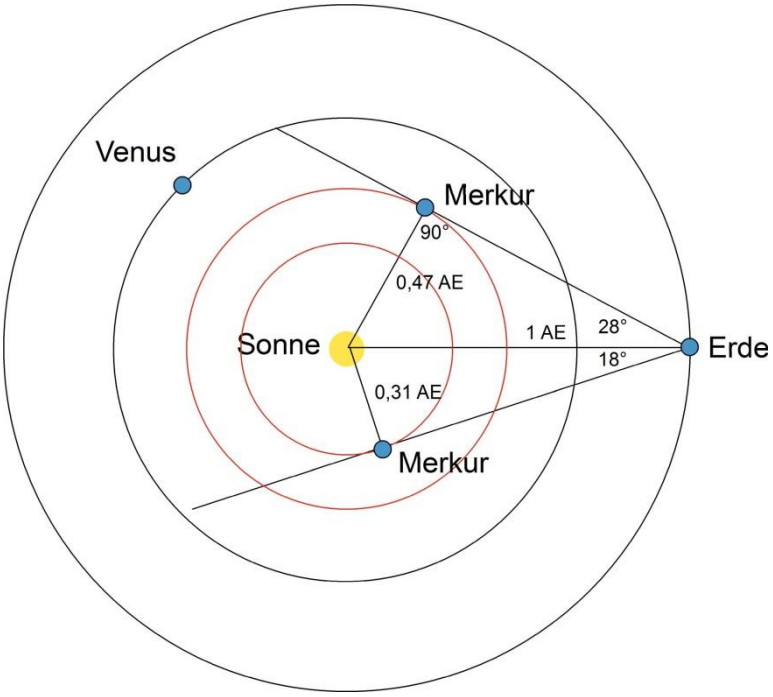
Der maximale Elongationswinkel beträgt 28°. Merkur zeigt sich im Fernrohr dann halb beleuchtet.

Dem Merkur auf der Spur

Können wir unter Anwendung der Methoden, mit denen wir Venus die "erforscht" haben, mehr über den Merkur erfahren? Und stimmen unsere Ergebnisse mit den wissenschaftlichen Daten überein?

1. Entfernung Sonne Merkur:

Der maximale Winkel zwischen Sonne und Merkur liegt zwischen 18° und 28°.



Das deutet, im Gegensatz zur fast kreisförmigen Bahn der Venus, auf eine stark exzentrische, elliptische Bahn hin. Übrigens: Alle Planeten bewegen sich auf Ellipsen, und statt von Bahnradius sollte man besser von der "großen Halbachse" dieser Ellipse sprechen!

$r_{Sonne\text{-}Merkur}$ = 1AE* sin28 = 0,47 AE
$r_{Sonne\text{-}Merkur}$ = 1AE* sin18 = 0,31 AE

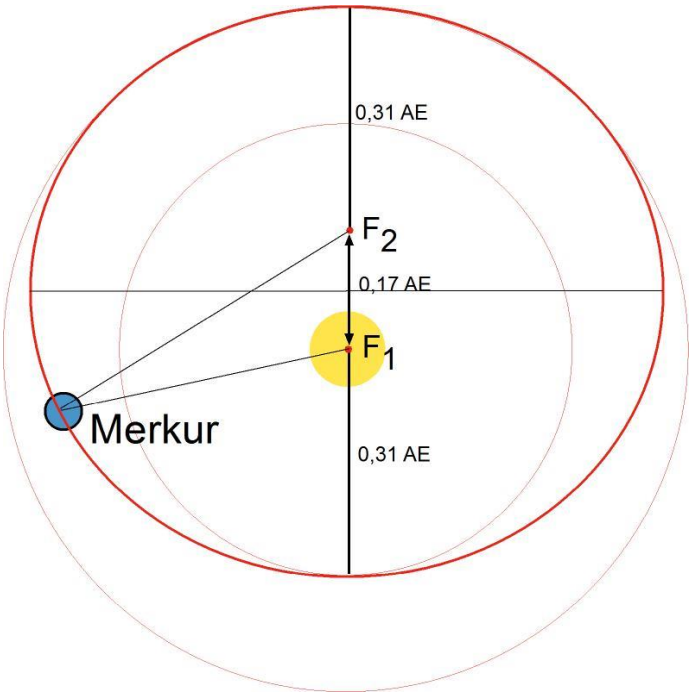
Die Entfernung Sonne-Merkur schwankt demnach zwischen dem 0,31 - 0,47fachen des Bahnradius der Erde. Die durchschnittliche Distanz ist (0,31 + 0,47)/2 = 0,39 AE.

Die tatsächlichen Distanzen für die Sonnennähe (Perihel) und Sonnenferne (Aphel) des Merkurs betragen nach WIKIPEDIA 0,307 – 0,467 AE, die große Halbachse (mittlerer Bahnradius) wird mit 0,387 AE angegeben.

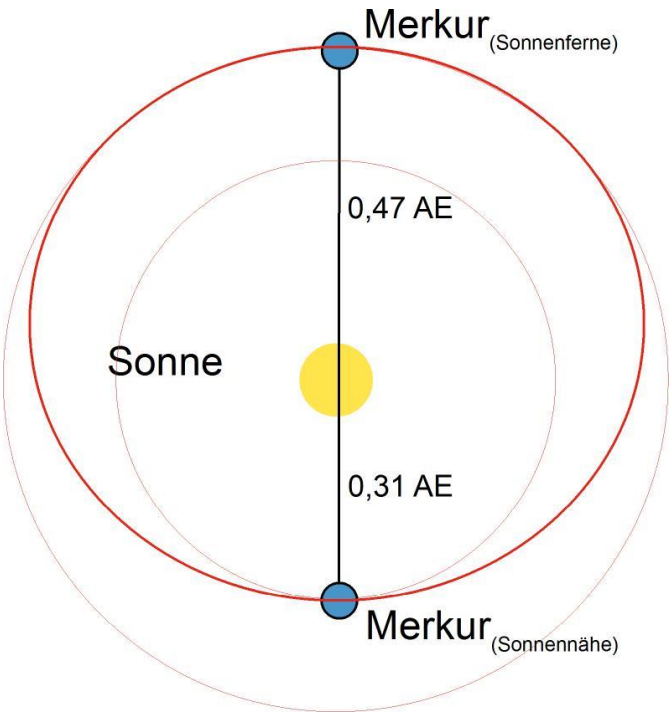
Aus den beiden maximalen Elongationswerten und den daraus folgenden größten und kleinsten Abständen kann man die elliptische Bahn des Merkur konstruieren.

Eine Ellipse hat zwei Brennpunkte. Die elliptischen Planetenbahnen sind dadurch gekennzeichnet, dass die Sonne in einem der beiden Brennpunkte (F_1, F_2) liegt.

Konstruktion der Ellipse mit Hilfe eines Fadens und eines Bleistifts:



- Schlage zunächst 2 Kreise mit den Radien 0,31AE und 0,47AE um die Sonne
- Die Sonne steht im Brennpunkt F_1 der Ellipse.
- F_2 ist 0,17 AE von F_1 entfernt (0,31AE + 0,47AE - 2*0,31AE)
- Befestige einen Faden mit der Länge 0,31AE + 0,47AE =0,78AE in F_1 und F_2.
- Ziehe den Faden mit der Bleistiftspitze straff und umfahre die Sonne.



- Mit 1 AE ≈ 150 Millionen km ist Merkur folglich zwischen 46,5 und 70,5 Millionen km von der Sonne entfernt.
- Der Mittelwert wäre dann 58,5 Millionen km
- Der Mittelwert ist die große Halbachse der Ellipse die dem Bahn"radius" des Planeten entspricht.
- (WIKIPEDIA: 57,909 Mill. km).

Die Exzentrizität *e*, die die Abweichung der Umlaufbahn vom Kreis ausdrückt ist

$$e = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}}$$

Für Merkur gilt nach den aus den Elongationswinkeln berechneten maximalen und minimalen Distanzen zur Sonne:

$$e = \frac{0{,}47\text{AE}-0{,}31\text{AE}}{0{,}47\text{AE}+0{,}31\text{AE}} = 0{,}205$$

Der Wert bei WIKIPEDIA ist 0,20563069

Nur bei großer Elongation tritt der Merkur soweit aus dem Licht der Sonne, dass man ihn wenigstens einige Tage lang am Morgen- oder Abendhimmel erkennen kann.

2. Umrechnung synodische in siderische Umlaufzeit

$$\frac{1}{T_{sid_{Merkur}}} = \frac{1}{T_{sid_{Erde}}} + \frac{1}{T_{syn}}$$

$$\frac{1}{T_{sid_{Merkur}}} = \frac{1}{365d} + \frac{1}{116d} = 88d$$

Die tatsächliche, siderische Umlaufzeit der Merkur beträgt also 88 Tage.

3. Bahnradius des Merkur mit dem 3. Keplerschen Gesetz berechnet:

Vermutung:

$$\frac{{T_{Erde}}^2}{{T_{Merkur}}^2} = \frac{{a_{Erde}}^3}{{a_{Merkur}}^3}$$

$$\frac{365^2}{88^2} = \frac{150^3}{58^3} \approx 17{,}3$$

$$a_{Merkur} = \sqrt[3]{\frac{{a_{Erde}}^3 * {T_{Merkur}}^2}{{T_{Erde}}^2}}$$

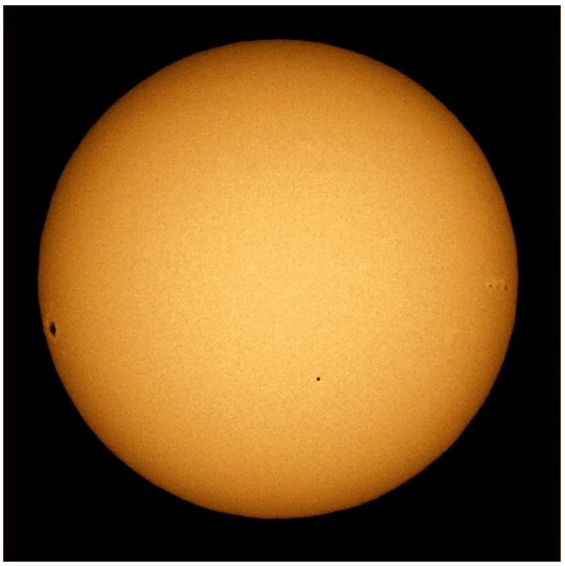
88 Tage = 0,2411 Jahre

$$a_{Merkur} = \sqrt[3]{\frac{149{,}6\ Mill.\ km^3 * 0{,}2411a^2}{1a^2}} = 57{,}6\ Mill.\ km$$

4. Größe des Merkurs

Die Größenbestimmung über den Sehwinkel, wie bei für die Venus berechnet, ist für uns Laien kaum möglich, da der Abstand Erde - Merkur durch dessen stark exzentrische Bahn großen Schwankungen unterliegt. Daher sind nur Schätzungen zwischen einem minimalen und einem maximalen Wert möglich.

Selbst wenn es uns möglich wäre, beim Vorbeizug (Transit) des Merkurs vor der Sonnenscheibe die scheinbare Große des Merkurs zu bestimmen können wir nicht erkennen, ob der Merkur sich gerade in Sonnennähe oder -ferne befindet. Damit kann die Distanz zwischen Erde und Merkur mal kleiner und mal größer ausfallen.



Am 9. Mai 2016 wird der Merkur vor der Sonne vorbeiziehen. Die (von Astronomen vorhergesagte) scheinbare Größe wird 12 Bogensekunden (12” = 0,0033°) betragen.

Mit Bahnradien von 0,31 - 0,47 AE ist Merkur in unterer Konjunktion (z.B. bei einem Transit) 0,53 - 0,69 AE von uns entfernt. Das entspricht 79,5 - 103,5 Millionen Kilometer.

Bild Merkurtransit
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/64/Mercury_transit_2.jpg

$\tan\alpha/2_{Merkur} * 79{,}5*10^6 km = \tan 0{,}00167° * 79{,}5*10^6 km = 2313$ km

$Ø_{Merkur} = 4625$ km

$\tan\alpha/2_{Merkur} * 103{,}5*10^6 km = \tan 0{,}00167° * 103{,}5*10^6 km = 3010$ km

$Ø_{Merkur} = 6020$ km

Der tatsächliche Durchmesser wird zwischen diesen Werten liegen.

Der bei WIKIPEDIA angegebene Wert ist 4879 km.

Ausblick auf die äußeren Planeten

Mit den durch Beobachtung und Vermessung gewonnenen Kenntnissen kann man sich an den "Rest" des Sonnensystems heranwagen und die gut sichtbaren Planeten Mars, Jupiter und Saturn "erforschen".

- Wie weit sind sie von uns entfernt?
- In welchen Abständen verlaufen ihre Bahnen?
- Wie weit sind sie von uns entfernt?
- Welche Umlaufzeiten haben sie?
- Wann sind sie der Erde am nächsten?
- Wann sind sie am besten zu sehen?
- Wie groß sind sie?

Bei dieser geometrisch-mathematischen Reise durch das All werden wir nichts Neues entdecken.
Alles steht schon seit langem im Lexikon und heute bei Wikipedia. Das gilt aber für andere Reiseziele auch.
Einen Film zu sehen oder selbst an den Drehort hinzuhinfahren macht schon einen Unterschied.
Das Besondere und hoffentlich motivierendes ist, einen Teil des Alls selbst entschlüsselt und dabei vielleicht besser verstanden zu haben.