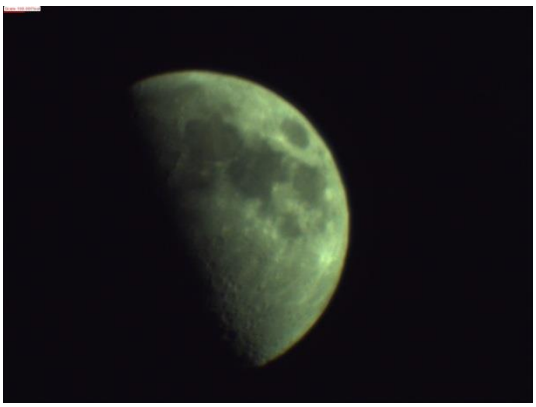
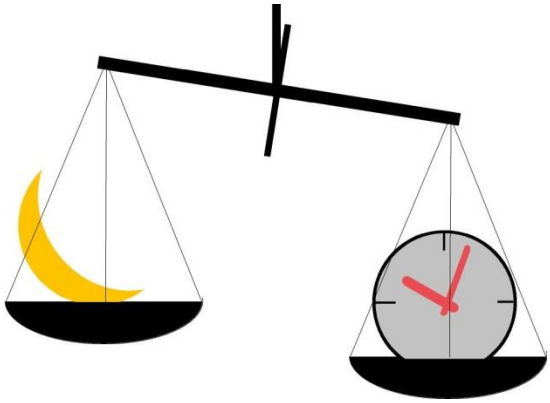
# Landeshauptstadt Hannover

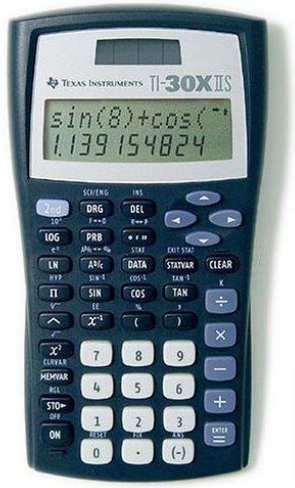
Hannover

Schulbiologiezentrum



$$G * \frac{M * m}{r^2} = m * \frac{v^2}{r}$$






**19.93**

# Wir wiegen den Mond und die Sonne mit Uhr und Taschenrechner

Ein astronomisch-physikalisches Unterrichtsprojekt

September2016

Herausgeber: Landeshauptstadt Hannover
Schulbiologiezentrum Hannover

Titel: Wir wiegen Mond und Sonne mit Uhr und Taschenrechner
Ein astronomisch-physikalisches Unterrichtsprojekt

Titelbild: Ingo Mennerich

**Arbeitshilfe 19.93**

Verfasser: Ingo Mennerich

Herausgeber: Landeshauptstadt Hannover
Fachbereich Bibliothek und Schule
Schulbiologiezentrum
Vinnhorster Weg 2
30419 Hannover
Tel: 0511/168-47665
Fax: 0511/168-47352
E-Mail: schulbiologiezentrum@hannover-stadt.de
Internet: www.schulbiologiezentrum.info

**Inhalt**


Der Weg ist das Ziel 1

"Hardcore"-Mathematik, didaktische Vereinfachungen und notwendige Ungenauigkeiten… 2

Raumschiff spielen… 3

"Schwerelos": Warum fallen Satelliten nicht herunter? 4

Ball an der Schnur… 4

Der Schwerkraft ein Schnippchen schlagen: Freier Fall und Wurf 5

Masse der Erde, Erdradius und Gravitationskonstante 7

Kurvenfahrt: Radial- oder Zentripetalkraft 8

Völlig losgelöst, von der Erde…? 9

„Satellit“ Erde: Wie viel Masse hat die Sonne? 10

Die Länge eines Monats verrät, wie groß der Mond ist 11

Welche Kräfte halten die Erde auf ihrer Bahn? 12

Wie hoch fliegt die Internationale Raumstation? 13

- Arbeitsblatt: Wie hoch fliegt die Internationale Raumstation? (+ Lösung) 15
- Arbeitsblatt: Wie schwer ist die Erde? (+ Lösung) 17
- Arbeitsblatt: Wie schwer ist der Mond? (+ Lösung) 19

Welche Kräfte halten den Mond auf seiner Bahn? 21

EXKURS EBBE und FLUT: 21

Wer ins All will, sollte mit Kepler rechnen… 22

Kepler-Gesetze 23

Umlaufzeiten und -radien mit Kepler-Gesetzen bestimmen 25

Die Mondentfernung aus den Umlaufzeiten von Satelliten bestimmen 27

Wie hoch "fliegt" der Mond? 28

Wie schwer sind Erde und Mond zusammen? 29

Welche Masse hat die Erde? 29

Welche Masse hätte der Mond, wenn er die gleiche Dichte wie die Erde hätte? 30

Wie man die Zeitspanne eines vollen Umlaufs des Mondes misst 31

Bestimmung der Mondmasse unter Berücksichtigung des Zweikörperproblems 32

Alle wichtigen Monddaten auf einen Blick 33


Thomas:

"Was wäre, wenn ich einen Ball mit der gleichen Geschwindigkeit in waagerechter Richtung werfen könnte wie er fällt?"

Sabine:

"Fällt der Ball denn überhaupt mit gleicher Geschwindigkeit?"

# Der Weg ist das Ziel

Haben Sie schon mal einen Lichtpunkt gesehen, der innerhalb weniger Minuten ohne jedes Geräusch über den Nachthimmel zieht? Nein, kein Flugzeug, das sich verrät durch blinkende Positionslichter, sondern ein von Menschen ins All geworfener, die Erde umrundender Satellit.
Ist der wandernde Lichtpunkt besonders hell wird es wahrscheinlich die Internationale Raumstation (ISS) sein die, nachdem sie über Sie hinweggeflogen ist in etwa anderthalb Stunden erneut in ihr Blickfeld geraten wird. Wer seinen Arbeitstag ab und zu statt vor dem Fernseher sitzend, abends auf dem Balkon ausklingen lässt hat gute Chancen, sie über den Himmel ziehen zu sehen.
An einem solchen Abend wurde die Frage geboren, was sie dort oben auf ihrer Bahn fest festhält und was sie antreibt.
Daraus entstand die zunächst noch vage Idee, aus ihrer Umlaufzeit ihre Höhe berechnen zu können und aus beiden Werten die Masse der Erde.
Das ist nun wirklich nichts Neues für alle diejenigen, die die Internationale Raumstation auf ihre Bahn gebracht haben und jedes Mal wieder eine Meisterleistung erbringen, wenn sie die Besatzung ergänzen oder austauschen.
Die Mehrheit am Boden sieht die ISS entweder nie oder sieht darin ein Projekt, dessen Kosten die halbe Welt hätte ernähren können. Genauso wie das für manche völlig "überflüssige" Hubble-Weltraumteleskop das immer wieder von der ISS-Besatzung gewartet werden muss.

Ohne Neugier und ohne wissenschaftliches Denken wäre die Erde immer noch eine Scheibe und würde gottgewollt von der sie umkreisenden "lieben Sonne" umkreist. Ohne das in wissensbegierigen Menschen brennende Feuer wären wir immer noch der Nabel der Welt mit einem klaren "Oben" (Himmel) und "unten" (Hölle) und möglicherweise bar jeder Möglichkeit, diese Vorstellungen in Frage zu stellen.

Auch der Mond zieht über den Himmel. In jeder wolkenlosen Nacht. Wer ein wenig näher hinschaut, wird feststellen, dass er im Laufe seines Monats seine Form verändert. Weniger bekannt ist, dass er jeden Tag ein wenig später auf und untergeht und dass er dabei seine Form verändert.
Wie leicht gelingt es Ihnen, daraus die Vorstellung zu entwickeln, dass der Mond die Erde umkreist? Und in welcher Richtung und in welcher Zeit?

Glücklicherweise leben wir heute in einer Zeit, in der es zur Allgemeinbildung gehört, dass die Welt so und nicht anders ist. Scheinbar bleiben kaum noch Fragen übrig. Das heutige, scheinbar selbstverständliche Wissen liegt, wie Albert Einstein es bescheiden für sich formulierte, auf den Schultern anderer.
Wir im Schulbiologiezentrum Hannover fördern "Inquire", die Fragen stellende wissenschaftsorientierte Pädagogik (IBSE: Inquiry based scientific education) und meinen, dass Allgemeinbildung nicht nur aus Daten besteht, sondern auch aus dem Erleben, wie Daten ermittelt, zusammengeführt und überprüft werden um schließlich zu einer kohärenten Theorie zu werden die auch von anderen nachvollzogen werden kann. Manchmal stürzen dabei lieb gewonnene Vorstellungen wie ein Kartenhaus zusammen.

Kann man den Mond wie einen Satelliten betrachten und aus seiner Umlaufzeit - man kann sie auch als "Normalverbraucher" messen! - seine Höhe bestimmen? Und vielleicht sogar seine Masse? Ja, man kann, wenn auch nur eingeschränkt genau. Aber das macht nichts:

Schon Laotse sagte: "Der Weg ist das Ziel"…

## "Hardcore"-Mathematik, didaktische Vereinfachungen und notwendige Ungenauigkeiten…

Auf den ersten Blick wird die Mathematik auf viele abschreckend wirken. Doch keine Angst:
Es geht eigentlich nur um zwei Gleichungen, die die Schwer- bzw. die Fliehkraft beschreiben.
Da sich umeinander rotierende Himmelskörper in einem Kräftegleichgewicht befinden kann man die beiden gleichsetzen. Durch die klassischen Techniken der Algebra, Umstellen, Kürzen, Quadrieren und Wurzelziehen kann man die Gleichungen in jeweils passende Formen bringen.
So formelhaftig die Herangehensweise wirken mag: Wer einmal beginnt, mit den Komponenten dieser Gleichungen zu jonglieren, wird feststellen:

- Sonne, Mond und Erde sind, was ihrer Bewegungen angeht, eigentlich alles ganz logisch und überhaupt nicht zufällig miteinander verknüpft.
- Die dahinter stehende Mathematik ist ein relativ einfaches, aber faszinierendes Werkzeug zur Ermittlung von tatsächlichen Größen, Entfernungen und Massen von Elementen unseres Sonnensystems.
- Physikalische, durch Experimente auf der Erde bestätigte Gesetze haben auch im All Gültigkeit.
- Viele der so durch die Mathematik ermittelten Ergebnisse lassen sich durch andere Herangehensweisen überprüfen und bestätigen, wie zum Beispiel die Mondentfernung durch die Laufzeitmessung von Laser-Echos.

Es geht hier um Beziehungen zwischen Zeit, Weg und Geschwindigkeit, um die Beschleunigung von Massen, die Gravitation und den Fall, also im Wesentlichen um die Newton´sche Physik.
Ergänzt und kombiniert wird sie mit den Erkenntnissen Keplers der die Bewegung von Himmelskörpern mit wenigen einfachen mathematischen Gesetzen erklärte.
Der Rest ist Algebra, also die Umstellung von Formeln.
Ein in den Formeln wiederkehrender und grundlegender Wert, die Gauß´sche Gravitationskonstante lässt sich in der Schule nur schwer ermitteln. Wir skizzieren dennoch kurz, wie man experimentell vorgeht.
Grundlage der astronomischen Entfernungsberechnung im Sonnensystem ist die Astronomische Einheit (AE). die mittlere Distanz Erde - Sonne. Sie bildet den "Ur-Maßstab". Ohne ihn hätte man die Entfernungen innerhalb des Sonnensystems nur schätzen können.
Der genaue Wert der AE beruht auf Beobachtungen des Vorbeizuges der Venus vor der Sonnenscheibe ("Venustransit") aus unterschiedlichen Beobachtungspositionen auf der Erde und wird heute durch Radar und Laser-Echos verfeinert.

Zur unerlässlichen didaktischen Vereinfachung sind einige Zusammenhänge stark verkürzt dargestellt, wie z.B. das "Zweikörperproblem" Erde/Mond. Den relativ massereichen Mond gleichzustellen mit einem in Bezug auf die Erde massearmen Satelliten führt natürlich zu fehlerhaften Ergebnissen. Die Abweichungen von offiziellen Daten sind aus schulischer Sicht nicht allzu groß.
Wer allerdings die Satelliten, die Navis und weltweite Kommunikation durch Facebook, Twitter oder Whatsapp erst möglich machen, selber im All parken möchte sollte wissen, dass das alles noch viel, viel komplizierter ist.
Und dass unsere vielen technischen Annehmlichkeiten auf den Schultern vieler kluger Köpfe steht.

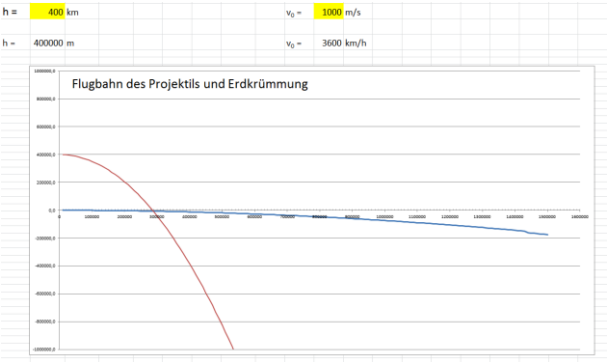
## Raumschiff spielen…

Komplizierte Zusammenhänge versteht man am besten wenn man sie spielend begreift.

Wir haben eine kleine EXCEL-"App" geschrieben mit der man ein Objekt aus einer bestimmten Höhe über der Erdoberfläche waagerecht abschießen kann. Die Geschwindigkeit wird dann gehalten.
Dann lässt sich beobachten was geschieht.

- Ist die Geschwindigkeit zu gering fällt das Objekt auf die Erde
- Ist sie gerade richtig folgt es der Erdkrümmung
- Ist sie zu groß verlässt das Objekt die Erde

Einzugeben sind lediglich die Starthöhe in Kilometern und die Geschwindigkeit in Metern pro Sekunde.

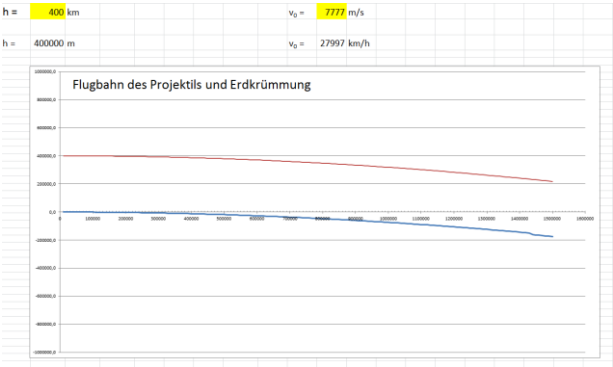



Starthöhe 400 km

Geschwindigkeit 1000 m/s = 3600 km/h

Objekt fällt auf die Erde

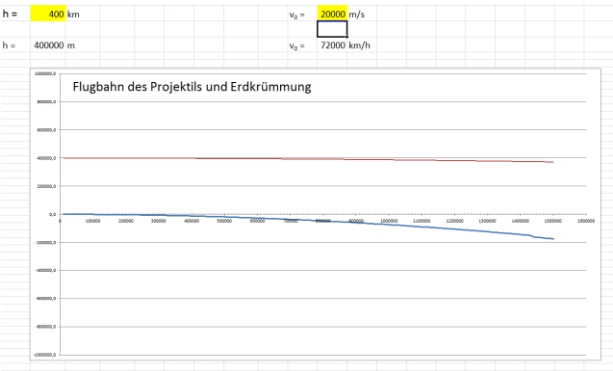
Rote Kurve: Flugbahn
Blaue Kurve: Erdkrümmung




Starthöhe 400 km

Geschwindigkeit 7777 m/s = ≈28000 km/h

Objekt umkreist die Erde




Starthöhe 400 km

Geschwindigkeit 20000 m/s = 72000 km/h

Objekt verlässt die Erde

### Grundlagen:

Formel Erdkrümmung $y = ((x^2 + (r+h)^2)^{0,5} - (r+h))*-1$
Formel Waagerechter Wurf $y = - g/2v^2*x^2$
r = Erdradius 6371000 m, g = 9,81 $m/s^2$; v = Geschwindigkeit (m/s), x = horizontale Wegstrecke (m); y = vertikale Wegstrecke (m);
h = Ausgangshöhe (m)

## "Schwerelos": Warum fallen Satelliten nicht herunter?

Warum fallen Satelliten und die Erde umkreisende Raumschiffe nicht herunter?
Ein Flugzeug hat "Aufrieb" erzeugende Flügel die es die Luft tragen. Jeder weiß, dass ein Flugzeug, durch Düsen oder Propeller angetrieben, in Bewegung bleiben muss um nicht vom Himmel zu fallen.
Im All ist die Luft zu dünn für Flugzeuge, Auftrieb kann nicht entstehen und der zur Verbrennung von Treibstoff notwendige Sauerstoff ist nicht vorhanden.
Die ISS und die vielen Satelliten fliegen dennoch und das mit einer Präzision nach der man kann seine Uhr stellen könnte.
Ohne Antrieb, ohne Auftrieb ziehen sie ihre Bahnen und - das wird manchen überraschen - fallen dabei, nicht auf, sondern um die Erde herum. Oft wird angenommen, dass sie sich im "schwerelosen" Raum befänden. Das ist nicht der Fall. Würde die ISS aus irgendeinem Grunde angehalten, würde sie wie ein Stein zur Erde fallen.
Denn Körper ziehen einander mit einer von an ihren Massen und ihrem Abstand abhängigen Kraft, der Schwer- oder Gravitationskraft an. Da die Erde um ein vielfaches massereicher ist als die ISS und entsprechend träger, würde die ISS zur Erde gezogen und die nicht die Erde zur ISS.
Ein weiterer Punkt, der gegen die angebliche Schwerelosigkeit des Raumschiffs spricht. Ein auf eine bestimmte Geschwindigkeit beschleunigter Körper, auf den keine Kräfte mehr einwirken, würde seine Geschwindigkeit und seine Richtung beibehalten. Für die Astronauten wäre das fatal, denn ihr Weg würde geradeaus von der Erde ins All wegführen.
Die ISS-Besatzung schwebt aber doch bei ihrer Arbeit! Solche „Schwerelosigkeit“ lässt sich auch in Erdnähe erleben z.B. bei einem Fallschirmabsprung (vor dem Öffnen des Schirms!) oder bei einem Parabelflug. Bei schneller Abwärtsfahrt in einem Fahrstuhl fühlt man sich um einiges leichter um beim Abbremsen viele Stockwerke tiefer ein kurzfristiges Gefühl bleierner Schwere zu haben.
Die „Schwerelosigkeit“ der Astronauten und des Raumschiffs ist das Ergebnis eines Kräftegleichgewichts, nämlich der Gravitationskraft (vulgo „Schwerkraft“) und der gegen die Massenträgheit aufzuwendende Radial- oder Zentripetalkraft. Dieses Kräftegleichgewicht tritt bei einer von der „Flughöhe“ abhängigen Geschwindigkeit ein.

## Ball an der Schnur…

Lässt man einen Ball an einer Schnur kreisen kann man die hier wirkenden Kräfte fühlen:

- Man braucht Kraft, um den Ball an Schnur rotieren zu lassen.
- Je schwerer der Ball ist, desto mehr Kraft braucht man.
- Je schneller der Ball rotiert, desto größer ist der Kraftaufwand..
- Die Hand die den Ball herumwirbeln lässt beschreibt dabei einen Kreis.
- Lässt man die Schnur los, geradeaus weiter.
- Die Flugbahn des aus der Kreisbahn ausbrechenden Balls ist tangential.

Kraft ist notwendig um den Ball in eine Kreisbahn zu zwingen, das heißt ihn daran zu hindern, seiner Trägheit folgend, geradeaus zu fliegen.
Je schwerer der Ball, desto mehr Kraft muss aufgewendet werden, damit er nicht seinem "eigentlichen" Weg folgt.

## Der Schwerkraft ein Schnippchen schlagen: Freier Fall und Wurf

Wenn wir etwas fallen lassen, fällt es senkrecht zu Boden. Wir haben uns daran gewöhnt zu sagen, dass alles nach „unten“ fällt. „Unter“ uns, in „DownUnder“ Australien ist das nicht anders, was nichts anderes bedeutet als dass ein fallendes Objekt in Richtung des Mittelpunkts der Erdkugel strebt.
Streng genommen ziehen sich massereiche Erde und das massearme fallende Objekt gegenseitig an. Da die Erde aber vielfach „schwerer“ ist als jedes auf sie fallende Objekt fällt das Objekt und nicht die Erde. Bei massereicheren Körpern, wie etwa dem Mond ist das schon anders. Er zieht auf seiner Umlaufbahn den Erdmittelpunkt tatsächlich mal in die eine, mal in die andere Richtung so dass die Umlaufbahn der Erde um die Sonne leichte Kurven beschreibt.
Wenn wir einen Ball in die Luft werfen, können wir ihn eine Zeit lang davor bewahren herunterzufallen. Bald werden ihn die Gravitation und die bremsende Luftreibung wieder auf den Boden ziehen. Aber: Je kräftiger wir werfen, desto länger bleibt er in der Luft und desto weiter entfernt ist der Aufschlagpunkt. Da unsere Kräfte jedoch begrenzt sind, sind auch olympische Weiten endlich.
Distanzwaffen wie Pfeile, Gewehr- und Kanonenkugeln, Panzergranaten oder Cruise-Missiles sollen ihre Wirkung auch in größerer Entfernung entfalten. Mit den Gesetzen beschäftigt sich die Ballistik die vorhersagen kann, wo ein in bestimmten Winkel abgeschossenes Projektil ins Ziel schlagen wird.
Isaac Newton soll sich schon im Anblick eines fallenden Apfels gefragt haben, wie schnell er in horizontaler Richtung abgeworfen werden müsste um nicht auf die Erde herunterzufallen sondern um sie herumzufliegen.

Diese minimale Kreisbahngeschwindigkeit (auch „Erste kosmische Geschwindigkeit“ genannt) folgt der Beziehung

$$v = \sqrt{G * \frac{M}{r}}$$

*v* ist die Geschwindigkeit in m/s, *M* die Masse des Zentralkörpers (hier der Erde) und *r* die Entfernung zum Mittelpunkt der Masse, also dem Erdradius plus der „Flughöhe“ des Objekts.
*G* ist die Gravitationskonstante (bitte nicht mit *g*, der Fallbeschleunigung verwechseln)

Ein Objekt das die Erde im „Tiefflug“ umkreisen soll, muss dann mindestens

$v = \sqrt{6{,}67 * 10^{-11} * \frac{5{,}97*10^{24}}{6371000m}}$ = 7906 m/s schnell sein. Das entspricht 7906m*3600s = 28461 km/h, also der etwa 28fachen Schallgeschwindigkeit. Es würde die Erde, die einen Umfang von etwa 40000 km hat in etwa $\frac{40000\text{km}}{28461\text{km}} * 60\text{ min}$ =84,3 Minuten umkreisen.

Was ist, wenn das Projektil auf dem Mount Everest abgefeuert wird?
Wenn wir dem Erdradius 8 km hinzufügen erhalten wir die Mindestgeschwindigkeit für die Kreisbahn

$v = \sqrt{6{,}67 * 10^{-11} * \frac{5{,}97*10^{24}}{6379000m}}$ = 7901 m/s = 28444 km/h

Die Minimalgeschwindigkeit ist um etwa 5 m/s geringer.

Der in dieser Höhe größere Kreisumfang von U = 2$\pi$r = 40080 km wird in 84,5 Minuten durchlaufen.
Daraus ist zu folgern:

- Die Umlaufbahn wird mit wachsender Höhe größer
- Die minimale Kreisbahngeschwindigkeit sinkt mit der Höhe
- Die Umlaufzeit steigt mit der Höhe an
- Zwischen diesen Beziehungen gibt es einen Zusammenhang

Überprüfen wir das noch einmal in zwei Gedankenexperimenten:

Gesetzt den Fall, das Projektil könnte aus einer Höhe von 400 km oder 400000 km abgeschossen werden. Dann betragen die Minimalgeschwindigkeiten

$v = \sqrt{6{,}67 * 10^{-11} * \frac{5{,}97*10^{24}}{6771000m}}$ = 7669 m/s bzw. $\sqrt{6{,}67 * 10^{-11} * \frac{5{,}97*10^{24}}{406371000m}}$ = 990 m/s

Das entspricht 27608 km/h bzw. 3564 km/h

Die Kreisumfänge um den Erdmittelpunkt betragen nach U = 2$\pi$r
Für „Flughöhen“ von 400 km bzw. 400000 km betragen sie 42543 km und 2553304 km.

Damit lassen sich die Umlaufzeiten errechnen:

$\frac{42543\text{km}}{27608\text{km}} * 60\,\text{min}$ =92,5 Minuten bzw. $\frac{2553304\text{km}}{3564\text{km}} * 60\,\text{min}$ = 42985 Minuten.

Die Internationale Raumstation ISS kehrt, wenn sie den „lokalen“ Himmel durchquert hat, nach etwa anderthalb Stunden wieder. Könnte man umgekehrt aus der Umlaufzeit die Höhe ermitteln?
Sollte sie dann etwa 400 km betragen?

Wenn der Einwand erhoben werden sollte, dass ein Objekt in 400000 km „schwerelos“ sei und dass in dieser Höhe die Gesetze der Schwerkraft nicht gelten sei an den Mond erinnert.
Er zieht seit vielen Jahrmillionen ruhig und verlässlich seine Bahn um die Erde, ohne auf sie herabzustürzen oder sich merklich von ihr zu entfernen. Würde die Erde keine Kräfte auf den Mond ausüben, flöge der Mond geradeaus, sich von der Erde entfernend, ins All. Doch er wird von einem „unsichtbaren Band“, der Schwerkraft auf seiner Bahn gehalten.

Tatsächlich stellen Erde und Mond große Massen und umkreisen wie Tänzer einen gemeinsamen Schwerpunkt der tief unter der Erdoberfläche liegt, nicht aber den Erdmittelpunkt bildet.

Übrigens: Der Mond ist in der Größenordnung von 400000 km von der Erde entfernt.
Und wenn wir die 42985 Minuten die unser in 400000 km Höhe abgefeuertes Profil für einen Umlauf braucht in Stunden und Tage umrechnen kommen wir zu einem erstaunlichen Ergebnis: Das sind 29,9 Tage. Das ist etwa ein Monat.
Monat, Mond? Gibt es da einen Zusammenhang?

Könnte man aus der Umlaufzeit des Mondes auf den Abstand zur Erde schließen?
Man kann. Und mehr noch: Man kann den Mond sogar „wiegen“.

## Masse der Erde, Erdradius und Gravitationskonstante

Woher kennt man die Masse der Erde, ihren Radius und den winzig kleinen Wert der Gravitationskonstante?

Die Erdmasse kann man aus der für die Erde typischen Fallbeschleunigung errechnen, mit großen Unsicherheiten auch aus dem Volumen und der Dichte der Erdkugel. Das setzt aber voraus, dass der Erdumfang vermessen wurde. Aus dem Kreisumfang kann man den Radius errechnen und schließlich das Volumen. Die Dichte der Erde ist erheblich schwerer zu fassen- Zwar können wir pars pro toto Teile der Erdoberfläche wiegen, das Volumen z.B. durch Wasserverdrängung messen und daraus die Dichte des Gesteins errechnen. Damit bleiben wir aber auf die dünne Erdkruste beschränkt. In den Erdmantel und den Erdkern sind wir noch nicht vorgedrungen.
Die aus der Fallbeschleunigung ermittelte Erdmasse hat gezeigt, dass unser Planet in seinem Inneren aus dichterem („schwereren“) Material als oberflächennaher Granit oder Basalt bestehen muss.
Die Gravitationskonstante kann aus der Fallbeschleunigung, der Masse und dem Radius folgen, allerdings nur dann, wenn diese Werte genau bekannt sind.

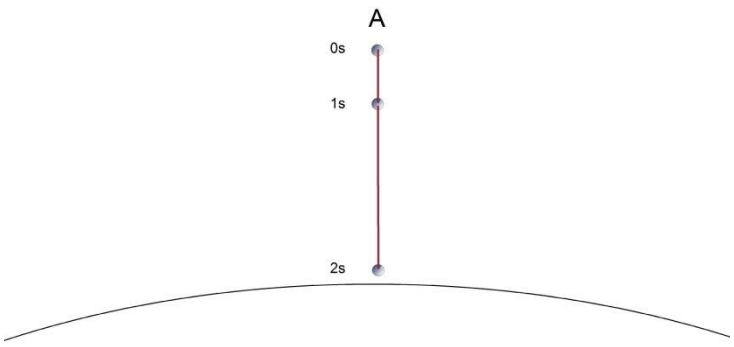
Die Gravitationskonstante *G* ist ein Proportionalitätsfaktor. Nur wenn man weiß, wie stark sich zwei Massen von jeweils einem Kilogramm anziehen kann man die Stärke dieser „Anziehungskraft“ auch auf andere Massen übertragen. Der Engländer Cavendish hat den Wert für *G* in einem aufwändigen Experiment ermittelt. Er ist sehr klein:

$$6{,}67 * 10^{-11}$$

Wenn wir die Formel $v = \sqrt{G * \frac{m}{r}}$ quadrieren und nach M, r oder G auflösen:

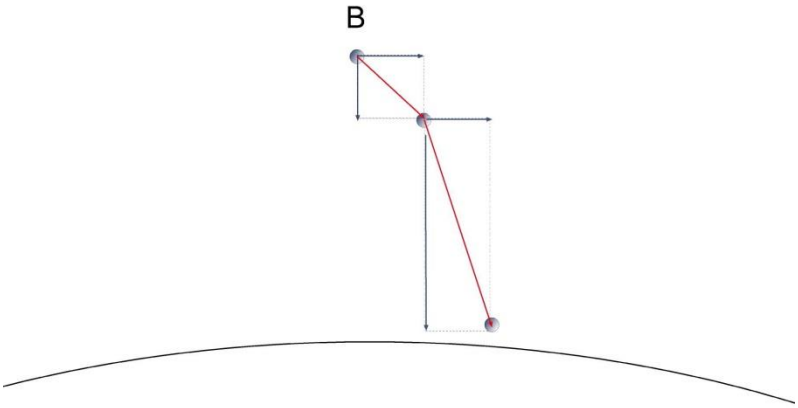
$v^2 = G * \frac{m}{r} \rightarrow m = \frac{v^2 * r}{G} \rightarrow r = G * \frac{m}{v^2} \rightarrow G = \frac{v^2 * r}{m}$

$$v = s * t$$



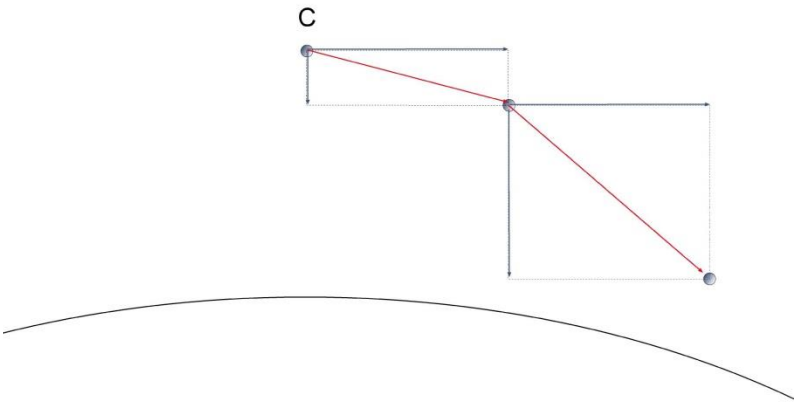

A:

Beim freien (senkrechten) Fall wird der Ball beschleunigt und hat nach einer Sekunde eine von der Fallbeschleunigung abhängige Wegstrecke zurückgelegt. Nach zwei Sekunden ist den vierfachen Weg gefallen und schlägt auf dem Boden auf.




B:

Wird er waagerecht abgeworfen ist er zwei Kräften ausgesetzt, der Gravitationskraft ($F_G$) und der senkrecht dazu stehenden Radial- oder Zentripetalkraft ($F_R$).
In der ersten Sekunde sind beide Kräfte gleich groß. So beschreibt der Ball eine nach unten geneigte Kurve und schlägt etwas später auf.




C:

Ist die Anfangs-Beschleunigung groß genug kann der Ball beim Fall der Krümmung der Erde folgen.
Er fällt dabei gewissermaßen um die Erdc herum.

In allen drei Fällen A, B und C gilt:
Die waagerechte Beschleunigung beim Abwurf führt am Ende der ersten Sekunde zu einer bestimmten Geschwindigkeit die dann beibehalten wird (keine Reibung!)..
Die Fallbeschleunigung wächst mit nahezu 10m pro Sekunde Quadrat.

## Kurvenfahrt: Radial- oder Zentripetalkraft

Rotiert ein Objekt mit der Masse *m* in einem bestimmten Abstand *r* und der Geschwindigkeit *v* um einen Kreismittelpunkt, so ist die darauf einwirkende Radial- oder Zentripetalkraft $F_R$ oder $F_G$ definiert durch

$$F_R = m * \frac{v^2}{r}$$

Je größer die Masse und die Geschwindigkeit und je kleiner der Kreisradius, desto größer die Radialkraft.

Beispiel: Auf eine Masse von 1 kg die mit 6,28 m/s Geschwindigkeit einen Kreis mit dem Radius 1 m beschreibt wirkt eine Radialkraft von $F_R = 1\text{kg} * \frac{6{,}28\text{m/s}^2}{1m}$ = 39,48 N ein.

Die Geschwindigkeit eines Objekts in einer Kreisbahn lässt sich auch durch den Kreisumfang U = 2⍰r und die Umlaufzeit *T* ausdrücken:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Im obigen Beispiel ist $v = \frac{2\pi * 1\mathrm{m}}{1\mathrm{s}}$ = 6,28 m/s

Wird *v* in $F_R = m * \frac{v^2}{r}$ durch $\frac{2\pi r}{T}$ ersetzt erhält man

$$F_R = m * \frac{(\frac{2\pi r}{T})^2}{r}$$

Umgeformt wird daraus

$F_R = m * \frac{\frac{2^2\pi^2 r^2}{T^2}}{r} = m * \frac{\frac{4\pi^2 r^2}{T^2}}{r}$ und durch Kürzen $F_R = m * \frac{4\pi^2 r}{T^2}$

Machen wir nach obigem Beispiel die Probe: $F_R = 1kg * \frac{4\pi^2 * 1\mathrm{m}}{1\mathrm{s}^2}$ = 39,48N

Die Formel $F_R = m * \frac{4\pi^2 r}{T^2}$ schreiben wir vereinfacht $F_R = m * \frac{4\pi^2 m * r}{T^2}$

## Völlig losgelöst, von der Erde…?

Wie groß sind die Kräfte die auf die Erde umkreisende Objekte einwirken?

Gravitationskraft:

$$F_G = G * \frac{M * m}{r^2}$$

Radial- oder Zentripetalkraft

$$F_R = \frac{4\pi^2 * m * r}{T^2}$$

Objekt 1: 400 km Flughöhe, Umlaufzeit T= 92,5 min = 5550s

Objekt 2: 400000 km Flughöhe, Umlaufzeit T = 42985 min = 2579100s

Masse der Erde: $5{,}974 * 10^{24}$kg
Angenommene Masse der die Erde umkreisenden Objekte jeweils 1 kg

Objekt 1:

$F_G = 6{,}67 * 10^{-11} * \frac{5{,}974 * 10^{24}\mathrm{kg} * 1\mathrm{kg}}{6771000m^2}$ = 8,69N

$F_R = \frac{4\pi^2 * 1\mathrm{kg} * 6771000\mathrm{m}}{5550s^2}$ = 8,68N

Objekt 2:

$F_G = 6{,}67 * 10^{-11} * \frac{5{,}974*10^{24}\text{kg}*1\text{kg}}{406371000\text{m}^2}$ = 0,0024N

$F_R = \frac{4\pi^2*1\text{kg}*406371000\text{m}}{2579100\text{s}^2}$ = 0,0024N

Unter der Bedingung, dass die zwischen den Massenmittelpunkten wirksame Gravitationskraft $F_G$ genau so groß ist wie die Radial- oder Zentripetalkraft $F_R$ wird sich das die große Masse umkreisende Objekt sich ihr weder nähern noch von ihr entfernen.
Für die auf stabiler Bahn die Erde umkreisende Objekte gilt also $F_G = F_R$. Wird $F_R$ kleiner als $F_G$ geht das Objekt in den Sinkflug über. Wächst $F_R$ gegenüber $F_G$ an, etwa durch Beschleunigung und damit Geschwindigkeitszunahme, wird die Flugbahn ellipsenförmig. Dabei steigt das Objekt zunächst an wobei r größer und $F_G$ folglich geringer wird. Erhält das Objekt auf der höheren Bahn keinen weiteren Schub nimmt die Geschwindigkeit damit die Radialkraft $F_R$ zugunsten $F_G$ ab.

## „Satellit“ Erde: Wie viel Masse hat die Sonne?

Betrachten wir die Erde als einen die Sonne auf einer stabilen Kreisbahn umlaufenden „Satelliten“, können wir aus der „Flughöhe“ (also der Distanz Erde-Sonne) und der Umlaufgeschwindigkeit die Sonnenmasse errechnen.

Dazu quadrieren wir die die Formel für die minimale Kreisbahngeschwindigkeit

$v = \sqrt{G * \frac{m}{r}} \rightarrow v^2 = G * \frac{m}{r}$ und stellen sie nach m um: $m = \frac{v^2*r}{G}$

Die mittlere Entfernung Sonne-Erde wurde zunächst geometrisch ermittelt und nachfolgend auf andere Weise bestätigt: 149,6 Millionen Kilometer = $149{,}6*10^9$m

Vereinfachen wir die leicht elliptische Umlaufbahn der Erde zu einem Kreis beträgt der Kreisumfang

$U = 2\pi r = 2\pi * 149{,}6 * 10^9$ m = $9{,}4*10^{11}$ m

Unsere gemeinsame jährliche Reise um die Sonne ist also etwa 940 Millionen Kilometer lang.

Nach 365,26 Tagen sind wir wieder am „Anfang“ angelangt. Wir befinden uns dann aber nicht am Ausgangspunkt, weil die Sonne sich, wie alle anderen Milliarden Sterne unserer Galaxis auch, sich ein Stück weiter um das galaktische Zentrum gedreht hat.

365,26 Tage sind 365,26d*24h*60min*60s = 31558464 Sekunden

Daraus ermitteln wir die mittlere Umlaufgeschwindigkeit:

$v = \frac{9{,}4*10^{11}}{31558464\text{s}}$ = 29786m/s ≈ 29,8 km/h

Eingesetzt in $m = \frac{v^2*r}{G}$ erhalten wir die Sonnenmasse:

$m = \frac{29786\text{m/s}^2*149{,}6*10^9\text{m}}{6{,}67*10^{-11}}$ = $1{,}99*10^{30}$kg

Dieser Wert lässt sich auf andere Weise bestätigen, beispielsweise mit den Kepler-Gesetzen.

Die aus der Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche und dem Erd-Radius berechnete Masse unseres Planeten beträgt mit $5{,}974*10^{24}$kg gerade einmal

$$\frac{Masse_{(Erde)}}{Masse_{(Sonne)}} = \frac{5{,}974*10^{24}\text{kg}}{1{,}99*10^{30}\text{kg}} \approx \frac{1}{3000000}$$

Die Sonne ist also 3 Millionen Mal „schwerer“ als die Erde. Zwar verliert sie in ihrem heißen Zentrum bei der Fusion von Wasserstoffprotonen zu Helium ständig Masse. Sie wird dabei in Energie verwandelt die uns als „Sonnenenergie“ erreicht. Der Masseverlust ist aber relativ so gering, dass die sich Zeitabstände zwischen Sylvester und Sylvester nicht merkbar verändern werden.

Die Masse der Erde kann bei obiger Rechnung ignoriert werden. Die Sonne bestimmt die Umlaufgeschwindigkeiten der Planeten und das gemeinsame Massezentrum liegt fast im Zentrum der Sonne.

Die über lange Zeiträume nahezu unveränderte Länge eines Erdenjahres ist kein Zufall sondern findet ihre Erklärung in der Masse unseres „Sterns“, der Sonne. Wäre die Erde der Sonne näher wäre das Jahr, wie auf der Venus, kürzer, liefe sie auf der Bahn des Mars, erheblich länger.

Das führt zur Frage, warum die Planetenbahnen so stabil sind wie sie sind. Warum fällt die Erde nicht in einer großen Spirale langsam auf die Sonne zu?

## Die Länge eines Monats verrät, wie groß der Mond ist

Hat man durch simultane Winkelmessung an zwei weit voneinander entfernten Orten auf der Erde die Distanz Erde-Mond vermessen, kann man aus der Winkelgröße des Mondes seinen Durchmesser bestimmen.

Ob das auch auf rechnerische Weise zum Erfolg führt?

Die auf der Erde zu beobachtende Umlaufzeit des Mondes um die Erde beträgt 27,32 Tage. Nach dieser Zeitspanne steht der Mond wieder vor demselben, weit entfernten Sternenhintergrund (siderische Umlaufzeit).

Unter der Annahme, dass die auf den Mond einwirkende Gravitationskraft im Gleichgewicht zur Radialkraft steht gilt wieder

$$G * \frac{M*m}{r^2} = \frac{4\pi^2*m*r}{T^2}$$

und, da sich die Mondmasse *m* beim Umstellen herauskürzt:

$$G * \frac{M}{r^2} = \frac{4\pi^2*r}{T^2}$$

Ziel ist zunächst, die Entfernung Erde-Mond, also den Kreisbahnradius *r* der Mondbahn zu ermitteln. Bekannt ist die Gravitationskonstante $G = 6{,}67*10^{-11}$, die aus der Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche und dem Erdradius errechnete Erdmasse $5{,}97*10^{24}$kg und die beobachtete Umlaufzeit T = 27,32 Tage.
27,32 Tage = 27,32d*24h*60min*60s = 2360448s

Nach *r* aufgelöst folgt: $r^3 = \frac{G*M*T^2}{4\pi^2}$ oder $r = \sqrt[3]{\frac{G*M*T^2}{4\pi^2}}$

$r = \sqrt[3]{\frac{6{,}67*10^{-11}*5{,}97*10^{24}\mathrm{kg}*2360448^2\mathrm{s}}{4\pi^2}}$ = 383039094m ≈ 383039 km

Das stimmt schon recht gut mit der „offiziellen“ mittleren Entfernung Erde-Mond von 384000km überein.

Der Umfang der Mondbahn ist $U = 2\pi r = 2 * \pi * 383039094\mathrm{m} = 2406705605\mathrm{m}$

Diese Strecke von 2406706km durchläuft der Mond in 27,32 Tagen.

Auf der Erde beobachten wir, dass sich der Mond vor dem Hintergrund der Sterne in etwa einer Stunde um etwa einen Monddurchmesser (etwa 0,5 Winkelgrade) nach Osten verschiebt.

Multiplizieren wir 27,32 Tage mit 24 Stunden erhalten wir eine Umlaufzeit von etwa 656 Stunden.

In einer Stunde „schafft“ der Mond im Schnitt eine Strecke der Länge $\frac{2406705\mathrm{km}}{656\mathrm{h}} = 3670\mathrm{km}$.

Der tastsächliche Monddurchmesser wird mit 3476km angegeben.

Gründe für die Ungenauigkeit unserer Rechnung:

- Die durchschnittliche Winkelgeschwindigkeit des Mondes ist etwas größer als der scheinbare Monddurchmesser:

  $\frac{360°}{27{,}32d*24h} = 0{,}55°$ und $\frac{3670km}{3476km} \approx \frac{0{,}55°}{0{,}5°}$

- Bei allen Überlegungen gehen wir immer von Kreisbahnen aus. Das muss zu Fehlern führen, denn die Mondbahn ist eine Ellipse.
- Der Mond hat eine Masse und bildet zusammen mit der Erde ein „Zweikörper-System“ dessen Mittelpunkt zwar in der Erde aber nicht mit ihrem Zentrum zusammenfällt.

## Welche Kräfte halten die Erde auf ihrer Bahn?

Gravitationskraft zwischen Sonne und Erde $F_g$:

$F_g = G * \frac{M*m}{r^2}$ M: Masse der Sonne, m: Masse der Erde

$F_g = 6{,}67 * 10^{-11} * \frac{1{,}99*10^{30}\mathrm{kg}*\ 5{,}97*10^{24}\mathrm{kg}}{149{,}6*10^9\mathrm{m}^2}$= 3,54*$10^{22}$N

Auf die Erde wirkende Zentripetal- oder Radialkraft $F_R$

$F_R = m * \frac{v^2}{r} = 5{,}97 * 10^{24}\mathrm{kg} * \frac{29786^2\mathrm{m/s}}{149{,}6*10^9\mathrm{m}}$ = 3,54*$10^{22}$ N

Beide Kräfte, $F_g$ und $F_R$ sind im Gleichgewicht. Das bedeutet: Die Erde fällt weder auf die Sonne noch driftet sie ins All.

Mathematisch bedeutet $F_g = F_R$ dass wir beide Formeln gleichsetzen und damit später je nach Verwendungszweck umstellen können

$$G * \frac{M * m}{r^2} = m * \frac{v^2}{r}$$

Wenn man $G * \frac{M*m}{r^2} = m * \frac{v^2}{r}$ nach *v* (Geschwindigkeit, m/s) auflöst und die kleine, in Bezug auf die große Masse *M* irrelevante Masse *m* ignoriert erhält man

$$G * \frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{r} \rightarrow v^2 = \frac{G*M*r}{r^2} \rightarrow v^2 = \frac{G*M}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G*M}{r}}$$

Diese Formel, $v = \sqrt{G * \frac{M}{r}}$ drückt die minimale Kreisgeschwindigkeit aus, d.h. die Geschwindigkeit, die ein um eine zentrale Masse rotierendes Objekt mindestens erreichen muss, um nicht auf die Masse herabzustürzen. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn die Gravitationskraft genau so groß ist wie die ihr entgegenwirkende Radialkraft.

## Wie hoch fliegt die Internationale Raumstation?

Wir haben die Masse der Sonne aus ihrer Entfernung und der Länge eines Umlaufs bekannt.

Man kann auch anders herum denken: Wenn die Masse des Zentralkörpers bekannt ist, lässt sich bei beobachtbarer Umlaufzeit die Entfernung des darum rotierenden Objekts, z.B. eines Satelliten oder Raumschiffs bestimmen.

Die ISS umkreist die Erde in 92 Minuten mit einer Bahnneigung von 51,6° zum Äquator in östliche Richtung fliegend.

Wie hoch fliegt sie?

Gravitationskraft zwischen Satellit und Erde $F_g$:

$$F_g = G * \frac{M * m}{r^2}$$

Auf den Satelliten wirkende Zentripetal- oder Radialkraft $F_z$

$$F_z = m * \frac{v^2}{r}$$

Da beide Kräfte $F_g$ und $F_R$ gleich im Gleichgewicht stehen müssen gilt $F_g = F_R$ und damit

$$G * \frac{M * m}{r^2} = m * \frac{v^2}{r}$$

Die Masse des Satelliten kürzt sich heraus:

$$G * \frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{r}$$

Mit $v = \frac{2\pi * r}{T}$ erhält man $v^2 = \frac{4\pi^2 * r^2}{T^2}$

$$G * \frac{M}{r^2} = \frac{\frac{4\pi^2 r^2}{T^2}}{r}$$

$$G * \frac{M}{r^2} * r = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

$$G * M * T^2 = \frac{4\pi^2 r^2 * r^2}{r}$$

$$G * M * T^2 = \frac{4\pi^2 r^4}{r}$$

$$\frac{G * M * T^2}{4\pi^2} = r^3$$

durch Umformung nach *r* folgt

$$r = \sqrt[3]{\frac{G * M * T^2}{4\pi^2}}$$

Die Flughöhe des Satelliten ist h = r - $r_{(Erde)}$ mit $r_E$ = 6371 km

$$h = \sqrt[3]{\frac{G * M * T^2}{4\pi^2}} - r_E$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 * 10^{-11} * 5{,}97 * 10^{24}\mathrm{kg} * 5520\mathrm{s}^2}{4\pi^2}} - 6371000\mathrm{m}$$

$h = 377483{,}6\mathrm{m}$ ≈ 377 km

Da sich die Erde zwischen zwei Überflügen in 92 Minuten etwa um 22,5° nach Osten weitergedreht hat ist die Zeitspanne zwischen den "Sichtbarkeitsfenstern" länger als die Umlaufzeit.

Für über dem Äquator "geparkte" geostationäre Satelliten, wie z.B. ASTRA gilt eine zur Erdrotation synchrone Umlaufdauer von etwa 24 Stunden (genau 23 h 56min 04s).
Daraus ergibt sich eine Höhe von

$$h = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 * 10^{-11} * 5{,}97 * 10^{24} kg * 84600 s^2}{4\pi^2}} - 6371000m$$

$h = 35267369{,}8m$ ≈ 35267 km

## ARBEITSBLATT

# Wie hoch fliegt die Internationale Raumstation?

Die ISS fliegt in West-Östlicher Richtung über Deutschland hinweg.

Sie wird zeitgleich in Göttingen, Hannover, Hamburg und Flensburg beobachtet.
Dabei werden folgende Winkelhöhen über dem Südhorizont gemessen:

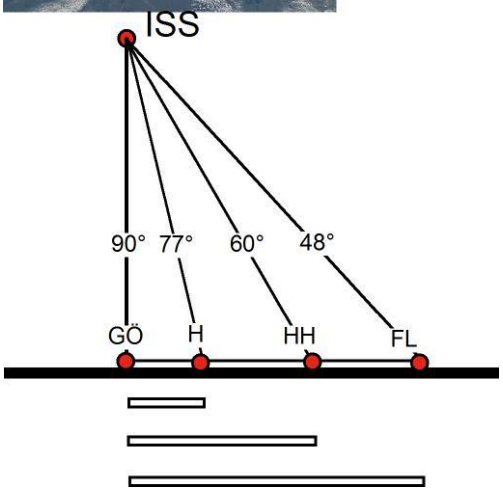
| | | | |
|---|---|---|---|
| Göttingen | 90° | Hamburg | 60° |
| Hannover | 77° | Flensburg | 48° |

Miss die Distanzen zwischen diesen vier Orten und versuche die Höhe der ISS zu bestimmen

Die Formel dazu ist

Höhe der ISS = tan*α**d

$\alpha$ = Winkel über dem Horizont
d = Entfernung (Luftlinie) von Göttingen



| | $\alpha$ | d | tan$\alpha$*d | Flughöhe ISS |
|---|---|---|---|---|
| Göttingen (51,55°N) | 90° | 0 km | | |
| Hannover (52,38° N) | 77° | 92 km | | |
| Hamburg (53,60° N) | 60° | 228 km | | |
| Flensburg (54,77° N) | 48° | 358 km | | |

Daraus folgt: Die ISS fliegt etwa _____ km über der Erdoberfläche

## ARBEITSBLATT (Lösung)

# Wie hoch fliegt die Internationale Raumstation?

Die ISS fliegt in West-Östlicher Richtung über Deutschland hinweg.

Sie wird zeitgleich in Göttingen, Hannover, Hamburg und Flensburg beobachtet.
Dabei werden folgende Winkelhöhen über dem Südhorizont gemessen:

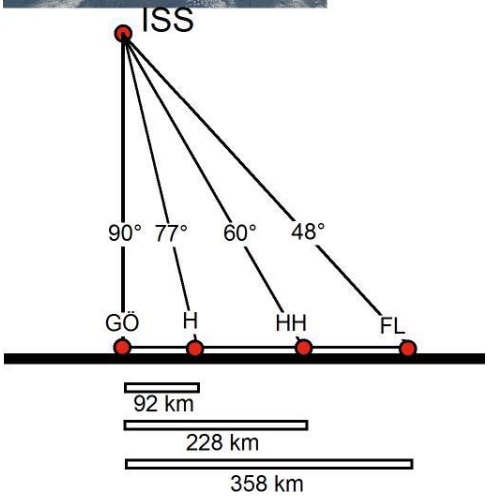
| | | | |
|---|---|---|---|
| Göttingen | 90° | Hamburg | 60° |
| Hannover | 77° | Flensburg | 48° |

Miss die Distanzen zwischen diesen vier Orten und versuche die Höhe der ISS zu bestimmen

Die Formel dazu ist

Höhe der ISS = tan*α**d

$\alpha$ = Winkel über dem Horizont
d = Entfernung (Luftlinie) von Göttingen



| | $\alpha$ | d | tan$\alpha$*d | Flughöhe ISS |
|---|---|---|---|---|
| Göttingen (51,55°N) | 90° | 0 km | | |
| Hannover (52,38° N) | 77° | 92 km | tan77*92km | = 398 km |
| Hamburg (53,60° N) | 60° | 228 km | tan60*228km | = 394 km |
| Flensburg (54,77° N) | 48° | 358 km | tan48*358km | = 397 km |

## Daraus folgt: Die ISS fliegt etwa 400 km über der Erdoberfläche

## ARBEITSBLATT

# Wie schwer ist die Erde?

Die ISS fliegt in West-Östlicher Richtung über Deutschland hinweg.

- Informiere dich im Internet, wann der nächste Überflug stattfindet.
- Beobachte die ISS und versuche die Umlaufzeit um die Erde zu bestimmen.

Die beobachtete Umlaufzeit liegt bei etwa ____ Minuten.

Die Flughöhe der ISS beträgt etwa _____ km.

Die Erde hat einen Radius von 6371 km.

Berechne die Masse der Erde $m_{Erde}$ nach der Formel*

$$m_{Erde} = \frac{4\pi^2 a^3}{GU^2}$$

- *U* die Umlaufzeit in Sekunden
- *a* Bahnradius der ISS (Erdradius + Bahnhöhe der ISS) in Metern
- *G* die Gravitationskonstante ($6{,}67*10^{-11} m^3/kg*s^2$)

*a* = = _____m

*U* = _____min = _____s

$$M_{Erde} = \frac{4\pi^2 _____ \mathrm{m}^3}{6{,}67 * 10^{-11} * _____ \mathrm{s}^2}$$

$$M_{Erde} = _____ \mathrm{kg}$$

## Erdmasse nach WIKIPEDIA:

_____ kg (_____ Tonnen).

*) Umgeformt aus $U = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1+m_2)}}$, die Masse der ISS ($m_2$) fällt dabei heraus

## ARBEITSBLATT (Lösung)

# Wie schwer ist die Erde?

Die ISS fliegt in West-Östlicher Richtung über Deutschland hinweg.

- Informiere dich im Internet, wann der nächste Überflug stattfindet.
- Beobachte die ISS und versuche die Umlaufzeit um die Erde zu bestimmen.

Die beobachtete Umlaufzeit liegt bei etwa 93 Minuten

Die Flughöhe der ISS beträgt etwa 400 km

Die Erde hat einen Radius von 6371 km.

Berechne die Masse der Erde $m_{Erde}$ nach der Formel

$$m_{Erde} = \frac{4\pi^2 a^3}{GU^2}$$

- *U* die Umlaufzeit in Sekunden
- *a* Bahnradius der ISS (Erdradius 6371 km + Bahnhöhe der ISS 400 km) in Metern
- *G* die Gravitationskonstante ($6{,}67*10^{-11} m^3/kg*s^2$)

*a* = 6371km + 400 km = 6771000m

*U* = 93min = 5580s

$$M_{Erde} = \frac{4\pi^2 6771000\mathrm{m}^3}{6{,}67 * 10^{-11} * 5580\mathrm{s}^2}$$

$$M_{Erde} = 5{,}9 * 10^{24}\mathrm{kg}$$

## Erdmasse nach WIKIPEDIA:

$5{,}9722 \cdot 10^{24}$ kg (5,97 Trilliarden Tonnen).

*) Umgeformt aus $U = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1+m_2)}}$, die Masse der ISS ($m_2$) fällt dabei heraus

## ARBEITSBLATT

# Wie schwer ist der Mond?

Wir betrachten den Mond als einen die Erde mit einer beobachtbaren Periode umlaufenden "Satelliten".

Seine Umlaufzeit um die Erde beträgt 27,32 Tage. Der Mond ist 384400km vom Erdmittelpunkt entfernt.

Behauptung:

Da die Masse der Erde bekannt ist, lässt sich aus der Distanz und der Umlaufzeit des Mondes dessen Masse berechnen.

$$U_{Mond}{}^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_{Erde} + m_{Mond})}$$

Umgeformt nach $m_{Mond}$:

$$m_{Mond} = \frac{4\pi^2 a^3}{U_{Mond}{}^2 * G} - m_{Erde}$$

- *U* die Umlaufzeit des Mondes in Sekunden
- $m_{Erde}$ Erdmasse in Kilogramm
- *a* Bahnradius des Mondes in Metern
- *G* die Gravitationskonstante ($6{,}67*10^{-11} m^3/kg*s^2$)

$$m_{Mond} = \frac{4\pi^2 * _____ m^3}{_____ s^2 * 6{,}67 * 10^{-11}} - _____ kg$$

$$m_{Mond} = _____ kg$$

## Mondmasse Wikipedia _____ kg

Massenverhältnis Erde/Mond:

$$\frac{m_{Erde}}{m_{Mond}} = \frac{_____ kg}{_____ kg} = \frac{____}{1}$$

## ARBEITSBLATT (Lösung)

# Wie schwer ist der Mond?

Wir betrachten den Mond als einen die Erde mit einer beobachtbaren Periode umlaufenden "Satelliten".

Seine Umlaufzeit um die Erde beträgt 27,32 Tage. Der Mond ist 384400km vom Erdmittelpunkt entfernt.

Behauptung:

Da die Masse der Erde bekannt ist, lässt sich aus der Distanz und der Umlaufzeit des Mondes dessen Masse berechnen.

$$U_{Mond}{}^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_{Erde} + m_{Mond})}$$

Umgeformt nach $m_{Mond}$:

$$m_{Mond} = \frac{4\pi^2 a^3}{U_{Mond}{}^2 * G} - m_{Erde}$$

- *U* die Umlaufzeit des Mondes (27,32 Tage) in Sekunden
- $m_{Erde}$ Erdmasse ($5{,}9*10^{24}$kg)
- *a* Bahnradius des Mondes (384400km) in Metern
- *G* die Gravitationskonstante ($6{,}67*10^{-11}m^3/kg*s^2$)

$$m_{Mond} = \frac{4\pi^2 * 384{,}4 * 10^6 \mathrm{m}^3}{2360448\mathrm{s}^2 * 6{,}67 * 10^{-11}} - 5{,}97 * 10^{24}\mathrm{kg}$$

$$m_{Mond} = 6{,}84 * 10^{22}\mathrm{kg}$$

## Mondmasse Wikipedia $7{,}349 \cdot 10^{22}$ kg

Massenverhältnis Erde/Mond:

$$\frac{m_{Erde}}{m_{Mond}} = \frac{5{,}97 * 10^{24}\mathrm{kg}}{7{,}35 * 10^{22}\mathrm{kg}} = \frac{81{,}2}{1}$$

## Welche Kräfte halten den Mond auf seiner Bahn?

Gravitationskraft zwischen Erde und Mond $F_g$:

$F_g = G * \frac{M*m}{r^2}$ M: Masse der Erde, m: Masse des Mondes

$F_g = 6{,}67 * 10^{-11} * \frac{5{,}97*10^{24}\text{kg}* 7{,}35*10^{22}\text{kg}}{384*10^6\text{m}^2}$ = $2*10^{20}$N

Auf den Mond wirkende Zentripetal- oder Radialkraft $F_R$

Der Umfang der Mondbahn $U = 2\pi r = 2 * \pi * 384000000\text{m} = 2412743158\text{m}$

Umlaufzeit des Mondes: *T* = 27,32 Tagen = 2360448s

Bahngeschwindigkeit $v = \frac{2412743158\text{m}}{2360448s} = 1022\text{m/s}$

$F_R = m * \frac{v^2}{r} = 7{,}35 * 10^{22}\text{kg} * \frac{1022^2\text{m/s}}{384*10^6\text{m}}$ = $2*10^{20}$N

Wird die Geschwindigkeit *v* durch $\frac{2\pi r}{T}$ ersetzt folgt:

$$F_R = m * \frac{v^2}{r} = m * \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$F_R = 7{,}35 * 10^{22}kg * \frac{4\pi^2*384*10^6m}{2360448^2s} = 2 * 10^{20}\text{N}$$

Beide Kräfte, $F_g$ und $F_R$ sind im Gleichgewicht. Das bedeutet: Die Mond fällt auf absehbare Zeit weder auf die Erde noch driftet er ins All.

Reibungseffekte, z.B. durch Gezeiten, verlangsamen die Rotationsdauer der Erde geringfügig so dass sich der Mond durch Drehimpulsübertragung langsam von der Erde entfernt.

## EXKURS EBBE und FLUT:

Wie groß ist die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche?

$$a = \frac{G * M}{r^2} = \frac{6{,}67 * 10^{-11} * 5{,}97 * 10^{24}\text{kg}}{6371000\text{m}^2} = 9{,}81\text{m/s}^2$$

Wie groß ist die Beschleunigung, die ein Teilchen im Zentrum der Erde durch den Mond erfährt?

$$a = \frac{G * m}{r^2} = \frac{6{,}67 * 10^{-11} * 7{,}35 * 10^{22}\text{kg}}{384 * 10^6\text{m}^2} = 3{,}3247 * 10^{-5}\text{m/s}^2 \approx 0{,}000033\text{m/s}^2$$

Dieser im Verhältnis zur Fallbeschleunigung sehr geringe Wert bedeutet, dass auch ein über uns stehender Mond einen Absturz nicht wirklich ab mildert.
Verschiedentlich zu vernehmende Nachrichten, dass man bei bestimmten Stellungen des Mondes weniger Kilos auf die Waage bringt mögen wohl auch besser in die Kategorie Esoterik gehören.

Wie steht es aber mit den Gezeiten? Heißt es nicht immer wieder, dass der Mond bei Flut das Wasser „hochzieht“?
Jeder der schon einmal einen vollen Wassereimer getragen hat weiß, dass es dazu schon einer gewissen Kraft bedarf. Und bei Ebbe und Flut sprechen wir von der Nordsee oder dem Atlantik…

Interessant ist es in diesem Zusammenhang zu verfolgen, wie groß die Beschleunigung durch den Mond nicht nur im Erdzentrum sondern an der Erdoberfläche ist. Hier gibt es zwei Seiten, eine dem Mond zugewandte, und eine dem Mond abgewandte Seite.
Gehen wir vereinfachend (!) davon aus, dass das Massezentrum des Systems Erd-Mond im Erdmittelpunkt liegt.
Auf der dem Mond zugewandten Seite ist die Entfernung Erde-Mond geringer als auf der anderen Seite. Im ersten Fall muss von der Distanz zwischen den Mittelpunkten beider Körper der Erdradius abgezogen, im zweiten Fall muss er hinzugefügt werden.

Dem Mond zugewandte Seite:

$$a = \frac{G * m}{(r - r_{Erde})^2} = \frac{6{,}67 * 10^{-11} * 7{,}35 * 10^{22}\mathrm{kg}}{(384 * 10^6\mathrm{m} - 6371 * 10^3\mathrm{m})^2} = 3{,}4378 * 10^{-5}\mathrm{m/s^2} \approx 0{,}000034\mathrm{m/s^2}$$

Dem Mond abgewandte Seite:

$$a = \frac{G * m}{(r + r_{Erde})^2} = \frac{6{,}67 * 10^{-11} * 7{,}35 * 10^{22}\mathrm{kg}}{(384 * 10^6\mathrm{m} + 6371 * 10^3\mathrm{m})^2} = 3{,}2171 * 10^{-5}\mathrm{m/s^2} \approx 0{,}000032\mathrm{m/s^2}$$

Die von der weit entfernten aber sehr massereichen Sonne ausgeübten Kräfte führen nach Voll- und Neumond zu gegenüber dem „normalen“ Tidenhub erhöhten Springtiden. Bei Voll- und Neumond bilden Sonne und Mond eine Linie mit der Erde so dass sich ihre Kräfte addieren.
Die von der Sonne auf ein Teilchen im Erdmittelpunkt vermittelte Beschleunigung beträgt

$$a = \frac{G * m_{Sonne}}{r^2} = \frac{6{,}67 * 10^{-11} * 1{,}99 * 10^{30}\mathrm{kg}}{149{,}6 * 10^9\mathrm{m}^2} = 5{,}9308 * 10^{-3}\mathrm{m/s^2} \approx 0{,}0059308\mathrm{m/s^2}$$

Der Distanzunterschied zwischen der der Sonne zu- bzw. abgewandten Seite ist angesichts der Entfernung Sonne-Erde vernachlässigbar klein.

## Wer ins All will, sollte mit Kepler rechnen…

Die „Flughöhen“ der Satelliten und die Entfernungen zwischen Erde und Mond bzw. der Sonne und den Planeten lassen sich auch auf andere Weise bestimmen, etwa durch das 3. Keplersche Gesetz.
Darauf fußt eine Überlegung, aus der Erdmasse, den Umlaufzeiten der Satelliten ermittelten Flughöhen und der trigonometrisch bestimmten Entfernung des Mondes die Masse unseres Trabanten zu errechnen.
Damit wären Fallbeschleunigung und Fluchtgeschwindigkeit ableitbar.

Aus dem ebenfalls trigonometrisch ermittelten Volumen des Mondes lässt sich auch seine durchschnittliche Dichte berechnen.

## Kepler-Gesetze

**1. Keplersches Gesetz**

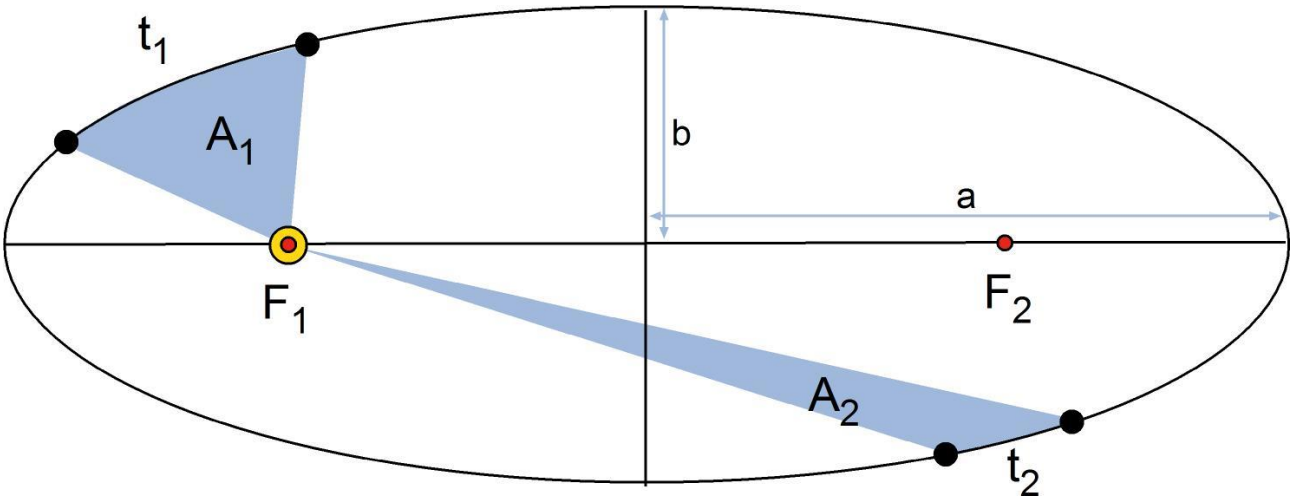
Planeten bewegen sich elliptischen Bahnen mit der Sonne in einem der beiden gemeinsamen Brennpunkte ($F_1$ , $F_2$). Ellipsen werden durch das Verhältnis der großen zur kleinen Halbachse (a/b) bestimmt.

Wenn zwei Körper durch Gravitation wechselwirken, so bewegen sie sich auf Ellipsenbahnen, in deren Brennpunkt der Schwerpunkt des Systems steht. Im Falle des Sonnensystems ist die Masse des Sonne so groß, dass sich der gemeinsame Schwerpunkt stets in der Nähe des Sonnenzentrums befindet.
Im Falle Erde/Mond ist das nicht so. Sie umkreisen einander mit einem gemeinsamen Schwerpunkt (Baryzentrum) etwa 1700 km unter der Erdoberfläche. Damit haben wir bei der Berechnung der Mondmasse ein "Zweikörperproblem" das das Ergebnis eines ersten "einfachen" Ansatzes etwas verfälscht. Wir werden dieses Problem in "didaktischer Vereinfachung" zunächst ignorieren.

**2. Keplersches Gesetz (Flächensatz)**

Auf ihren elliptischen Bahnen um die Sonne überstreichen die Planeten in gleichen Zeitabständen (t) gleiche Flächen (A).

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{A_1}{A_2}$$



**3. Keplersches Gesetz:**

Die Quadrate der Umlaufzeiten T zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer großen Halbachsen a.

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3$$

T in Sekunden (s)
a in Metern (m)

Beispiel:

| | Umlaufzeit T | | Große Halbachse a | |
|---|---|---|---|---|
| Erde | 365,256 Tage | 31558118s | 149,6 Mio. km | $149{,}6*10^9$m |
| Venus | 224,701 Tage | 19414166s | 108,2 Mio. km | $108{,}2*10^9$m |

$$\left(\frac{31558118s}{19414166s}\right)^2 = \left(\frac{149{,}6*10^9m}{108{,}2*10^9m}\right)^3 \approx 2{,}643$$

Da es nur auf die Proportionalität ankommt kann man (einfacher) auch in Tagen (d) und Millionen km rechnen.

$$\left(\frac{365{,}256d}{224{,}701d}\right)^2 = \left(\frac{149{,}6*10^6km}{108{,}2*10^6km}\right)^3 \approx 2{,}643$$

Auch wenn man Tage (d) in Jahre (a) verwandelt erhält man die gleiche Proportionalität.

Die Umlaufzeit der Erde beträgt 1 Jahr, die der Venus $\frac{224{,}701d}{365{,}256d}$ = 0,615a

Die unhandlich langen Halbachsen kann man auch in "Astronomische Einheiten" AE verwandeln.
1 AE ist die Mittlere Entfernung der Erde von der Sonne (Große Halbachse a = 149,6 Mill. Km)

Die Venus ist danach im Mittel $\frac{108{,}2*10^6km}{149{,}6*10^6km}$ = 0,723AE von der Sonne entfernt

$$\left(\frac{1a}{0{,}615a}\right)^2 = \left(\frac{1AE}{0{,}723AE}\right)^3 \approx 2{,}643$$

Im Sinne einer besseren Vereinbarkeit mit anderen Formeln sollte aber vorzugsweise in den SI-Einheiten Sekunde (s) und Metern (m) gerechnet werden.

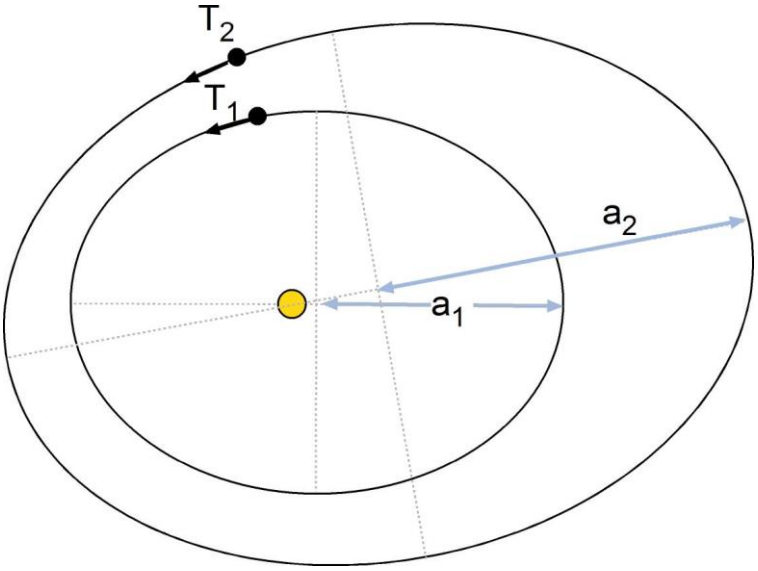
**Kepler-Konstante:**

Der Quotient $\frac{T^2}{a^3}$ des Quadrates der Umlaufzeit eines Planeten und der dritten Potenz der Länge seiner großen Halbachse (= mittlere Sonnenentfernung) ist die Kepler-Konstante C.

Diese hier am Beispiel der Erde berechnete Kepler-Konstante $C_s$ gilt im ganzen Sonnensystem:

$$C_s = \frac{(31558118\mathrm{s})^2}{(149{,}6 * 10^9\mathrm{m})^{\,3}} \approx 2{,}97 * 10^{-19}$$

Sie ist bei der Berechnung von Massen, Entfernungen und Umlaufzeiten weiterer Elemente im Sonnensystem sehr nützlich!




Drittes Keplersches Gesetz:

2 Planeten umkreisen die Sonne auf elliptischen Bahnen.
Die Sonne steht in einem der beiden Brennpunkte der jeweiligen Ellipse.

Die großen Halbachsen $a_2$ und $a_1$ werden mit der Mittleren Entfernung Sonne-Planet gleichgesetzt.

Die Umlaufzeit $T_2$ des äußeren Planeten ist größer als die des Planeten auf der inneren Bahn ($T_1$ ).

## Umlaufzeiten und -radien mit Kepler-Gesetzen bestimmen

In der Arbeitshilfe "Wie groß und wie weit entfernt ist der Mond?" haben wir uns in erster Linie geometrischer Methoden bedient. Mit der Größe und der Entfernung kann man unter Anwendung der Newtonschen Fassung des dritten Keplerschen Gesetzes auch seine Masse bestimmen. Ja sogar berechnen, wie hoch ich auf dem Mond springen könnte.

Das Dritte Keplersche Gesetz verknüpft die Umlaufzeiten und Abstände von Himmelskörpern die eine zentrale Masse (z.B. die Sonne) umkreisen.

Durch Beobachtung fand er heraus, dass sich die Quadrate der Umlaufzeiten (p) der Planeten so verhalten wie die Kuben der Radien ihrer Umlaufbahnen (a). Dabei ist p die Umlaufzeit in Jahren und a der mittlere Abstand zur Sonne, gemessen in Astronomischen Einheiten.
Eine Astronomische Einheit (AE) ist die mittlere Entfernung Erde-Sonne.

Es gilt also

$$p^2 = a^3$$

Kennt man die Umlaufzeit eines Planeten, lässt sein Abstand zur Sonne bzw. zur Erde in AE bestimmen.

Beispiel:
Der helle Jupiter steht alle 11 Jahre, 315 Tage und 3 Stunden vor dem gleichen Sternenhintergrund.

11y + 315d/365,256d + 0,125d/365,256d = 11y + 0,862y + 0,00034y = 11,862 Jahre

$a = \sqrt[3]{11{,}862^2}$ = 5,2 AE

Die Distanz Sonne-Erde (1 AE) wurde mit Hilfe der Venusparallaxe zu 149,6 Millionen km bestimmt. Danach beträgt die mittlere Distanz Sonne-Jupiter $149{,}6*10^6*5{,}2AE = 779{,}8*10^6$ km.

| | Entfernung Sonne (km) | Astronomische Einheiten (AE) | $AE^3$ | Umlaufzeit in Jahren (p) | $p^2$ | km/h |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Merkur | $57{,}9 \times 10^6$ | 0,39 | 0,06 | 0,241 | 0,06 | 172,3 |
| Venus | $108{,}2 \times 10^6$ | 0,72 | 0,38 | 0,615 | 0,38 | 126,1 |
| Erde | $149{,}6 \times 10^6$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 107,2 |
| Mars | $227{,}9 \times 10^6$ | 1,52 | 3,5 | 1,881 | 3,5 | 86,9 |
| Jupiter | $778{,}3 \times 10^6$ | 5,2 | 140 | 11,862 | 140 | 47,1 |
| Saturn | $1{,}429 \times 10^9$ | 9,53 | 866 | 29,458 | 866 | 34,9 |
| Uranus | $2{,}875 \times 10^9$ | 19,22 | 7098 | 84,014 | 7058 | 24,5 |
| Neptun | $4{,}504 \times 10^9$ | 30,1 | 27271 | 164,793 | 27156 | 19,5 |

Quadrate und Kuben stimmen durch gerundete Grundwerte nicht genau überein!

Die Bahngeschwindigkeit der Planeten ergibt sich aus dem Radius ihrer Umlaufbahn und der Umlaufperiode:

U = 2⍰r

1 Jahr = 365,256d*24h*60min*60s = 31558118 Sekunden

11,862y*31558118s = 374342395,7s

Für den Jupiter ergibt sich daraus eine Umlaufbahn

U = 2*⍰*$779{,}8*10^6$ km = $4899{,}6*10^6$ km

Und eine mittlere Bahngeschwindigkeit von

*v* = U/t (U in km, t in Sekunden)

*v*= 13090 m/s

## Die Mondentfernung mit dem 3. Keplerschen Gesetz aus den Umlaufzeiten von Satelliten bestimmen:

Die ISS umrundet die Erde in etwa 91 Minuten bei einer Flughöhe von 400 km.
Ein geostationärer Fernsehsatellit wie Astra folgt der Erdumdrehung (23h 56min 04s) in einer Flughöhe von 36000 km.

Der Mond braucht 27,3 Tage für eine Erdumrundung. Der Abstand Mond-Erde ist bekannt: 384000 km.

Kann man den in Kenntnis der Umlaufzeit und der Entfernung des Mondes auch die Flughöhen der Satelliten bestimmen?

Nach dem Dritten Keplerschen Gesetz ist $\frac{p^2}{a^3}$ = konstant (C). Der Wert $C_s = 2{,}97*10^{-19}$ ist gültig für das Sonnensystem mit der Sonne als großer zentraler Masse.

Überprüfen wir, ob C auch für die erdnahen Satelliten und den Mond konstant ist. In diesem Falle ist die Erde die zentrale Masse und $C_E$ ungleich $C_S$.

Der Bahnradius ist der Erdradius (6371 km) plus Flughöhe über der Erdoberfläche.

Für den Mond gilt dabei:

Mittlere Entfernung Baryzentrum (Erde-Mond) - Mondmittelpunkt: 384400 km

Das Baryzentrum liegt etwa 1700 km unter der Erdoberfläche.

Distanz Erdmittelpunkt - Mondmittelpunkt = (384000 km - 1700 km) + 6371 km = 389071 km

| | Bahnradius a | $a^3$ | Umlaufzeit p | $p^2$ | $p^2/a^3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ISS | 6778000m | $3{,}1139*10^{20}$ | 5346,72s | $2{,}8587*10^{7}$ | $9{,}1804*10^{-14}$ |
| Astra | 42378000m | $7{,}61064*10^{22}$ | 84346,2s | $7{,}1142*10^{9}$ | $9{,}3477*10^{-14}$ |
| Mond | 388700000m | $5{,}87278*10^{25}$ | 2360448s | $5{,}5717*10^{12}$ | $9{,}4873*10^{-14}$ |

Mit Excel berechnet

Kepler-Konstante für Erde/Mond

$$\frac{p^2}{a^3} = 9{,}4873 * 10^{-14}$$

Grundlage: Entfernung Erdmittelpunkt - Mondmittelpunkt

Wie groß ist die Fehlerquote, wenn wir aus der Umlaufzeit der Satelliten versuchen, ihre Bahnhöhe zu bestimmen?

Durch Umformen entsteht:

$$\frac{p^2}{a^3} = C \qquad \rightarrow p^2 = C * a^3 \quad \rightarrow p = \sqrt[2]{C * a^3}$$

$$\rightarrow a^3 = \frac{p^2}{C} \qquad \rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{p^2}{C}}$$

**Internationale Raumstation (ISS)**

Raumstation ISS (über die Umlaufzeit und (bekannte) Entfernung des Mondes* berechnet):

$a = \sqrt[3]{\frac{2{,}8587*10^{7}}{9{,}4873*10^{-14}}}$ = 6704123,1m ≈ 6704 km → Flughöhe: 6704 - 6371 = 333 km

*) Entfernung Erdmittelpunkt - Mondmittelpunkt

Die oben aus Gravitationskonstante, Erdmasse und Umlaufzeit bereits errechnete Flughöhe beträgt 377 km. Die von der NASA angegebene Flughöhe liegt zwischen 409 und 416 km.

**Geostationärer Satellit (z.B. ASTRA)**

Satellit Astra (über die Umlaufzeit und (bekannte) Entfernung des Mondes* berechnet):

$a = \sqrt[3]{\frac{7{,}1142*10^{9}}{9{,}4873*10^{-14}}}$ = 42169114,3m ≈ 42169 km → Flughöhe: 42169 - 6371 = 35978 km

*) Entfernung Erdmittelpunkt - Mondmittelpunkt

Die oben aus Gravitationskonstante, Erdmasse und Umlaufzeit bereits errechnete Flughöhe beträgt 35267 km.

## Wie hoch "fliegt" der Mond?

Lässt sich die Mondentfernung aus den Umlaufzeit und Bahnhöhen der Satelliten errechnen?

Die Idee dabei ist, den Mond als einen Satelliten zu betrachten, dessen Umlaufzeit um die Erde bekannt ist. Mit Hilfe der für das System Erde/Satellit ermittelten Kepler-Konstanten sollte das möglich sein.

Das oben bereits angedeutete "Zweikörperproblem" wird hier ignoriert. Der Mond stellt selbst eine so große Masse dar, dass der gemeinsame Schwerpunkt Erde/Mond nicht im geometrischen Zentrum der Erde liegen kann. Alle folgenden Ergebnisse werden daher mit Fehlern behaftet sein.

Mond (über die Umlaufzeit der ISS berechnet):

$a = \sqrt[3]{\frac{5{,}5717*10^{12}}{9{,}1804*10^{-14}}}$ = 392984456,6m ≈ 392985km → Flughöhe: 392985 - 6371 = 386614 km

Mond (über die Astra berechnet)

$a = \sqrt[3]{\frac{5{,}5717*10^{12}}{9{,}3477*10^{-14}}}$ = 390625855,8m ≈ 390626km → Flughöhe: 390626 - 6371 = 384255 km

## Wie schwer sind Erde und Mond zusammen?

Newtonsche Fassung des Dritten Kepler-Gesetzes:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_1 * M_2)} * r^3$$

*T* = Umlaufperiode in Sekunden
*r* = Bahnradius in Metern
*G* = Gravitationskonstante ($6{,}67*10^{-11}$)
$M_1$ = Masse (z.B. Erde) in kg
$M_2$ = Masse (z.B. Mond) in kg

Umgestellt nach Masse:

$$M_1 * M_2 = \frac{4\pi^2}{G * T^2} * r^3$$

Damit lassen sich in Kenntnis der Umlaufperiode und des Bahnabstandes zweier Himmelskörper das Produkt ihrer Massen bestimmen.

Im folgenden Fall wird angenommen, dass die Massenschwerpunkte im Zentrum von Mond und Erde liegen und *r* die Distanz zwischen diesen Massenpunkten ist.

Im Falle von Erde und Mond gilt

*T* = 27,3 Tage = 2358720s = $2{,}35872*10^6$s

*r* = 384400 km = 384400000m = $3{,}844*10^9$ m

*G* = $6{,}674*10^{-11}$

$$M_1 * M_2 = \frac{4\pi^2}{6{,}674 * 10^{-11} * (2{,}35872 * 10^6 s)^2} * (3{,}844 * 10^8 m)^3$$

Erde und Mond hätten zusammen also eine Masse von etwa $6{,}04*10^{24}$ kg

## Welche Masse hat die Erde?

Die Fallbeschleunigung 9,81m/$s^2$ und die Kenntnis des Erdradius ermöglicht es, die Erde zu "wiegen", d.h. ihre Masse zu bestimmen.
Die Kraft mit der sich die Erde und auf sie fallende Objekte gegenseitig anziehen wird bestimmt durch die beiden beteiligten Massen $M_E$ und *m* sowie durch ihren Abstand voneinander. Je größer das Produkt beider Massen und je kleiner ihr Abstand, desto größer ist die Anziehungskraft zwischen ihnen. Die Formel enthält zusätzlich den Wert *G*, die universell gültige Gravitationskonstante mit dem Wert $6{,}67*10^{-11}$.

$$F = \frac{M_E * m}{G * r^2}$$

Die Fallbeschleunigung *a* ist ein Sonderfall der Beschleunigung, die wir auch auf dem Motorrad erleben. In allen Fällen wird eine Masse aus der Ruhelage in Bewegung gesetzt. Die dafür erforderliche Kraft (*F*) setzt sich zusammen aus der beschleunigten Masse (*m*) und dem Maß ihrer Beschleunigung (*a*): Es gilt also *F = m*a*

$$m * a = \frac{M_E * m}{G * r^2}$$

Lösen wir die Formel nach *a* auf kürzt sich *m* heraus:

$$a = \frac{M_E}{G * r^2}$$

Aufgelöst nach $M_{Erde}$ erhalten wir:

$$M_E = \frac{a * r^2}{G}$$

Werden also für *F* die Fallbeschleunigung von 9,81 m/s$^2$ und der Erdradius *r* = 6371km in die Formel gesetzt erhalten wir

$$M_{Erde} = \frac{9{,}81\mathrm{m/s}^2 * (6371 * 10^3\mathrm{m})^2}{6{,}67 * 10^{-11}}$$

Und als Ergebnis die Masse der Erde:

$$5{,}97*10^{24}\ \mathrm{kg}$$

Subtrahieren wir diesen Wert von der bereits berechneten Gesamtmasse des Systems Erde-Mond erhalten wir für den Mond:

$$6{,}04*10^{24}\ \mathrm{kg} - 5{,}97*10^{24}\ \mathrm{kg} = 7*10^{22}\ \mathrm{kg}$$

Der Standardwert für die Mondmasse ist $7{,}35*10^{22}$kg

## Welche Masse hätte der Mond, wenn der die gleiche Dichte wie die Erde hätte?

Wenn wir annähmen, der Mond bestünde aus den gleichen Stoffen wie die Erde und hätte die gleiche Dichte könnte man das Volumenverhältnis Erde/Mond nutzen um die Masse des Mondes abzuschätzen.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Die Erde hat den Radius 6371 km, der Mond 1738 km

Daraus folgen:

$V_{Erde} = 1{,}083*10^{12}$ km$^3$ und $V_{Mond} = 2{,}199*10^{10}$ km$^3$

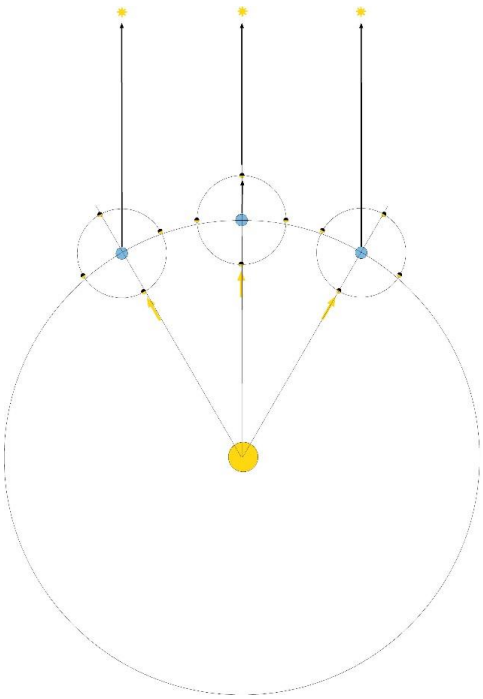
Der Quotient aus den beiden Volumina ist etwa 49/1. Die Erde hat also ein etwa um das 50fach größeres Volumen als der Mond.

Unter den oben vereinfachend angenommenen Bedingungen hätte der Mond etwa eine Masse von
$\frac{1}{49} M_{Erde} = \frac{1}{49} * 5{,}97 * 10^{24}\text{kg} = 1{,}23 * 10^{23}\text{kg}$

Tatsächlich beträgt die Mondmasse $7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg Der Mond ist also um einiges leichter als auf diese Weise berechnet.

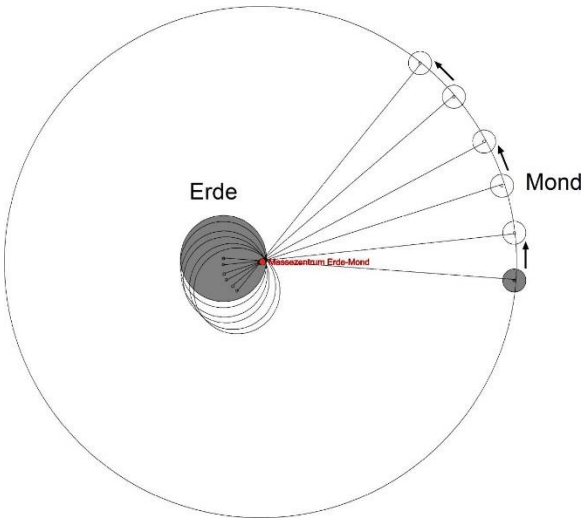
## Wie man die Zeitspanne eines vollen Umlaufs des Mondes misst

Wie lange braucht der Mond um die Erde einmal ganz zu umrunden? Diese Zeitspanne geht als Umlaufzeit *T* in die Bestimmung der Mondentfernung und -masse ein und sollte, um Fehler zu vermeiden, möglichst genau erfasst werden.
Gewöhnlich findet man zwei Umlaufzeiten, 27,32 und 29,53 Tage, erstere wird als „siderische“, letztere als „synodische“ bezeichnet.
Die um fast zweieinhalb Tage längere synodische Umlaufzeit schließt die Bewegung der Erde um die Sonne ein und markiert die Zeitspanne zwischen beispielsweise zwei Vollmonden oder den Zeitraum zwischen dem ersten Viertel (zunehmender Halbmond) und dem nachfolgenden ersten Viertel. Da die sich die Erde im Laufe eines Mondumlaufs ein Stück auf ihrer Bahn um die Sonne weiterbewegt hat ist dieser „Umlauf“ größer als 360°.
Die siderische Umlaufzeit ist die Zeitspanne die der Mond braucht um einen Kreis von 360° zu durchlaufen. Wenn der Mond aus der Erdperspektive wieder vor dem gleichen weit entfernten Sternenhintergrund steht hat er die Erde umrundet. Das tritt um 2,21 Tage früher ein als ein kompletter Phasenzyklus (Vollmond – Vollmond).



Nun ist es so, dass man sich gut darüber streiten kann, wann der Mond wirklich voll ist (oder noch bzw. schon ein "Ei") und auch der Zeitpunkt des "halben Mondes" nicht ganz leicht zu erfassen. Der muslimische Kalender beginnt einen neuen Monat mit dem "neuen Mond", der frühesten am Abendhimmel erkennbaren zarten Sichel. Aber auch diese scheinbar einfache Regel ist nicht frei von Widersprüchen und mehr oder weniger gelehrtem Streit.
Vollmond ist immer dann, wenn Sonne und Mond in Opposition, d.h. sich gegenüber stehen. Deshalb geht der Vollmond bei Sonnenuntergang auf und bei Sonnenaufgang unter. Der Zeitraum zwischen zwei Vollmonden (bzw. zwei identischen Mondphasen) erscheint auf den ersten Blick wie die Vollendung eines Kreises, also eines Umlaufs.

## Bestimmung der Mondmasse unter Berücksichtigung des Zweikörperproblems




Erde und Mond umkreisen ein gemeinsames Massenzentrum das aufgrund der im Verhältnis zum Mond erheblich massereicheren Erde noch innerhalb des Erdradius liegt.
Dieses Massezentrum liegt etwa 1670 km unter der Erdoberfläche.

Die Winkelgeschwindigkeit, d.h. der in gleicher Zeit überstrichene Teil der Kreisbahnen ist für Mond und Erde gleich.

Die Winkelgeschwindigkeit ω (omega) ist $\omega = \frac{2\pi}{T}$ mit der Umlaufdauer *T*.

Die auf die umeinander rotierenden Massen wirkenden Radial- und Gravitationskräfte stehen im Gleichgewicht. Es gilt:

$F_g = \frac{GMm}{r^2}$

$F_R = m * \omega^2 * r$

$F_g = F_R$

Und damit $m * \omega^2 * r = \frac{GMm}{r^2}$

S sei der Massenschwerpunkt („Drehpunkt“)

$r_1$ ist die Distanz zwischen dem Massenschwerpunkt S und dem Erdmittelpunkt.

$r_1$ = 6370km – 1670km = 4700km

$r_2$ ist die Distanz zwischen dem Massenschwerpunkt S und dem Mondmittelpunkt.

$r_2$ = 384000km – 4700km = 379300km

Die auf die Erde wirkende Radialkraft $F_R$ ist

$$F_R = m * \omega^2 * r_1$$

Die auf den Mond wirkende Radialkraft $F_R$ ist

$$F_R = m * \omega^2 * r_2$$

Die Gravitationskraft zwischen Erde und Mond ist

$F_g = \frac{GMm}{(r_1+r_2)^2}$

Da alle Kräfte gleich sind gilt

$m * \omega^2 * r_1 = \frac{Gm}{(r_1+r_2)^2}$ und $m * \omega^2 * r_2 = \frac{GM}{(r_1+r_2)^2}$

Durch *m*, $\omega^2$, *G* und $(r_1+r_2)$ gekürzt und umgestellt vereinfacht sich die Gleichung auf

$\frac{m}{M} = \frac{r_1}{r_2}$ und $m = M * \frac{r_1}{r_2}$

Und die Mondmasse *m*

$$m = 5{,}97 * 10^{24}\text{kg} * \frac{4700 * 10^3\ \text{km}}{379{,}3 * 10^6\ \text{km}} = 7{,}4 * 10^{22}\text{kg}$$

In Bezug auf unser Thema liegt die Problematik noch auf einer anderen Ebene.
Der Mond umkreist die Erde und die Erde umkreist die Sonne.

## Alle wichtige Mond-Daten auf einen Blick

- **Durchmesser des Mondes**: 3.476 km (27% des Erddurchmessers)
- **Volumen**: 2,2 x 1010 km³ (2% des Erdvolumens)
- **Masse**: 7,35 x 1022 kg (1,25% der Erdmasse)
- **Dichte**: 3,34 g/cm³ (Dichte der Erde: 5,5 g/cm³)
- **Schwerkraft**: 1,62 m/s² (16,5% der Erdschwerkraft)
- **Atmosphärendruck**: 3 x 10-10 Pa (Erde: 105 Pa)
- **Entfernung zur Erde**: 384.403 km (durchschnittlich; mind. 356.410 km, höchstens 406.740 km)
- **Umlaufzeit um die Erde**: 27,32 Tage (im Bezug auf die Fixsterne)
- **Phasenzyklus**: 29,53 Tage (von Vollmond zu Vollmond)
- **Albedo**: 0,12
- **Alter**: ca. 4,5 Milliarden Jahre
- **Aufbau**: innerer Eisen-Kern (100-400 km Radius), Basalt-Mantel (1.200-1.600 km Dicke) und Kruste (70-150 km Kruste)

Ingo Mennerich
Schulbiologiezentrum Hannover,
September 2016